Matemática A - 12º Ano

Resolução do Exame Nacional de Matemática A – 2014/2015

Prova 635 – 2ª Fase – Versão A

Nuno Miguel Guerreiro
pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

Grupo I

1. A tabela de distribuição de probabilidades apresentada de uma certa variável aleatória X respeita a propriedade $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$. Desta forma podemos concluir que:

$$a+2a+0,4=1 \Leftrightarrow a=0,2$$

Desta forma temos $P(X=1)=0,2$, $P(X=2)=2\times 0,2=0,4$ e $P(X=3)=0,4$, concluindo então que o valor médio da variável aleatória é:

$$\mu=1\times 0,2+2\times 0,4+3\times 0,4=2,2$$

Resposta Correcta: (B)

2. Um saco contém nove bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. Sabendo que as bolas numeradas de 1 a 5 são pretas e as restantes são brancas podemos concluir que existem 4 bolas com um número par (2,4,6,8) das quais apenas 2 são pretas (2,4). Desta forma, considerando *A: "A bola retirada é preta"* e *B: "o número da bola retirada é um número par"*, pode-se concluir que a probabilidade condicionada $P(A|B)$, isto é, a probabilidade de a bola retirada ser preta sabendo que está numerada com um número par é:

$$P(A|B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Resposta Correcta: (B)

3. Considerando as constantes reais a e b com $a>1$ e $b>1$ tais que $log_b a=\frac{1}{3}$, podemos concluir que:

$$\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\frac{1}{\log_a b}=\frac{1}{3} \quad \text{logo, pode-se concluir que } \log_a b=3$$

Pretendemos calcular $log_a(a^2b)$, vindo então:

$$\log_a(a^2b)=\log_a a^2+\log_a b=2\log_a a+\log_a b=2\times 1+3=5$$

Resposta Correcta: (D)

4. Para um certo número real k, a função f definida em $\mathbb{R}$ é contínua pelo que temos então $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Ora, calculemos o limite de f à direita do ponto de abcissa zero vindo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\ln(x+1)}{x}=2+\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=2+1=3$$

Verificando a igualdade acima referida e tendo em conta que $f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=2+e^k$ temos que

$$2+e^k=3\Leftrightarrow e^k=1\Leftrightarrow k=0$$

Resposta Correcta: (A)

 Enunciado em http://provas.iave.pt/

5. A função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3\sin^2(x)$ tem primeira derivada dada por:

$$f'(x) = (3\sin^2(x))' = 3 \times 2 \times (\sin x)' \times (\sin x) = 6 \sin x \cos x = 3(2 \sin x \cos x) = 3\sin(2x)$$

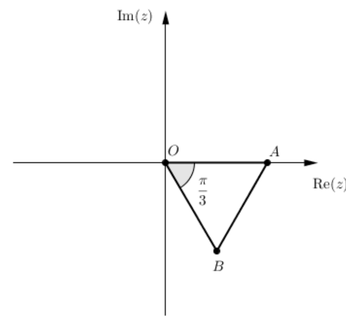
Desta forma, conclui-se facilmente que a segunda derivada de f é dada por:

$$f'' = (3\sin(2x))' = 3(2x)' \cos(2x) = 6\cos(2x)$$

Resposta Correcta: (C)

6. Está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[OAB]$. Tendo em conta que A é a imagem geométrica de um número complexo z_1, então $z_1 = 1$. Ora $|z_1| = 1$, logo, conclui-se que, como o triângulo é equilátero $|z_1| = |z| = 1$.
Do facto do triângulo $[OAB]$ ser equilátero também se pode concluir que os seus ângulos internos são iguais e de valor $\frac{\pi}{3}$ e como z está situado no 4º quadrante, conclui-se que:

$$z = cis\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = cis\frac{5\pi}{3}$$



Resposta Correcta: (D)

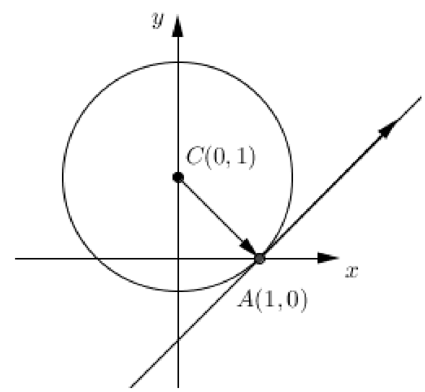
7. Está representada uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e de centro em $C(0,1)$ pois $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$ define a equação geral de uma circunferência com centro em $C(a,b)$.
O ponto A é o ponto da circunferência de abcissa positiva que intersecta o eixo Ox, logo com ordenada 0. vindo:

$$x^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Logo A(1,0) e definindo um vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,1) - (1,0) = (-1,1)$ temos que este é perpendicular ao vector director da recta tangente à circunferência no ponto A, logo como o declive da recta com vector director $\overrightarrow{u}$ é $m = \frac{0-1}{1-0} = -1$, o declive da recta tangente à circunferência no ponto A é $m' = -\frac{1}{m} = 1$. Como esta recta passa no ponto $A(1,0)$ temos:

$$y = mx + b \Leftrightarrow 0 = 1 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Concluindo-se então que a equação da recta tangente à circunferência no ponto A é $y = x - 1$.



Resposta Correcta: (B)

8. Analise-se os termos gerais das sucessões apresentadas:

- A sucessão de termo geral $u_n(-1)^n$ não é monótona pois, por exemplo, $u_3 - u_2 = -1 - 1 = -2 < 0$ e $u_2 - u_1 = 1 - (-1) = 2 > 0$;
- A sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n \cdot n$ não é monótona pois, por exemplo, $u_3 - u_2 = -3 - 2 = -5 < 0$ e $u_2 - u_1 = 2 - (-1) = 3 > 0$;
- A sucessão de termo geral $u_n = -\frac{1}{n}$ é limitada pois os seus termos pertencem sempre ao intervalo $[-1, 0[$ e é monótona pois $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2+n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- A sucessão de termo geral $u_n = 1 + n^2$ não é limitada pois não é majorada, repare-se que à medida que $n \to +\infty$, $u_n \to +\infty$.

Conclui-se então que o termo geral de uma sucessão monótona e limitada é $-\frac{1}{n}$.

Resposta Correcta: (C)

Grupo I

1. Considere-se $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e o número complexo $z_1 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{12}}$.

   De forma a escrever o número complexo z_1 na forma trigonométrica devemos passar $-1+i$ para esta mesma. Vem então:

$$-1+i = \rho_1\, cis(\theta_1) \text{ tal que } \rho_1 = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \text{ e } \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}, \theta_1 \in 3^{\text{o}} \text{ Quadrante}$$

   Desta forma temos

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{12}} = cis\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = cis\,\frac{2\pi}{3} \text{ vindo então } \overline{z_1} = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

   Pretendemos resolver a equação $z^4 = \overline{z_1}$ e pela Fórmula de De Moivre temos se $z = \rho\, cis\,\alpha$, então $z^4 = \rho^4\, cis\,(4\alpha)$. Logo pretendemos resolver a equação $z^4 = \rho^4\, cis\,(4\theta) = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, vindo:

$$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

   As soluções são então, substituindo pelos valores de k no argumento de z:

$$z = cis\left(-\frac{\pi}{6}\right), \qquad z = cis\,\frac{\pi}{3}, \qquad z = cis\,\frac{5\pi}{6} \qquad z = cis\,\frac{4\pi}{3}$$

   .

2. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola. A distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

   A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo.

   (2.1) No instante em que se iniciou a contagem do tempo o ponto P coincidia com o ponto A e sabe-se que durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais que uma vez. Isto é, a distância $d = d(0)$ é percorrida mais que uma vez. Tem-se então:

$$d(0) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}\,m$$

   Ora, pretende-se então calcular as soluções da equação $d(t) = \frac{5}{4}$, vindo:

$$d(t) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

   Equivalente a

$$\pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$t = 2k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

   Ora, tem-se então para $k = 0$ as soluções $t = 0s$ e $t = \frac{2}{3}\,s$ e para $k = 1$ as soluções $t = 2s$ e $t = \frac{8}{3}\,s$. Como se procura os instantes diferentes do inicial tem-se que as soluções do problema são $t = \frac{2}{3}\,s$, $t = 2s$ e $t = \frac{8}{3}\,s$.

(2.2) A função $d(t)$ é uma função contínua no seu domínio pois trata-se da soma de uma constante a uma função trigonométrica, também contínua. Desta forma, pode-se concluir que $d(t)$ é contínua em $[3,4]$ e estamos nas condições de aplicação do Teorema de Bolzano. Deve-se agora calcular as imagens $d(3)$ e $d(4)$ vindo:

$$d(3) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$d(4) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Como temos que $d(3) < 1,1 < d(4)$ e sendo $d(t)$ contínua em $[3,4]$ conclui-se que:

$$\exists\, c \in]3,4[:\ d(c) = 1,1$$

3. Considere-se a função f, de domínio $\mathbb{R}$.

(3.1) Pretendemos estudar a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico, logo, devemos calcular os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Vem então:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1+xe^x) = \underbrace{1 + \lim_{x\to-\infty} xe^x}_{\text{Se } y=-x \text{ vem } y\to-\infty} \overset{0\times\infty}{=} 1 - \lim_{y\to+\infty} ye^{-y} = 1 + \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$$

Então vem que a recta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Calcule-se agora $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ tal que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln(x-3) - \ln(x)) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\tfrac{x-3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \tfrac{3}{x}\right) = \ln\left(1 - \tfrac{1}{+\infty}\right) = 0$$

Então vem que a recta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

(3.2) Pretendemos resolver, em $]-\infty,3]$, a condição $f(x) - 2x > 1$. Tenha-se em conta que neste intervalo $f(x) = 1 + xe^x$. Vem então:

$$1+xe^x-2x > 1 \Leftrightarrow xe^x-2x > 0 \Leftrightarrow x(e^x-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \,\wedge\, e^x - 2 > 0 \\ x < 0 \,\wedge\, e^x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \,\wedge\, x > \log 2 \\ x < 0 \,\wedge\, x < \log 2 \end{cases}$$

A solução é então solução da intersecção dos intervalos de números reais correspondente a cada linha do sistema vindo:

$$(]0,+\infty[\cap]\log 2, 3]) \cup (]-\infty,0[\cap]-\infty,\log 2[) =]-\infty,0[\cup]\log 2,3]$$

O conjunto solução é então o intervalo de números reais $]-\infty,0[\cup]\log 2,3]$.

(3.3) A equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4 tem declive dado pelo valor da derivada de f no ponto de abcissa 4. Uma vez que em $x = 4$ temos $f(x) = \ln(x-3) - \ln(x)$ vem que:

$$f'(x) = \frac{(x-3)'}{x-3} - \frac{(x)'}{x} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Conclui-se facilmente que o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4 é $m = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Esta recta passa no ponto $(4, f(4))$ com $f(4) = \ln(4-3) - \ln(4) = -\ln(4)$ pelo que temos:

$$y = \frac{3}{4}x + b \Leftrightarrow -\ln(4) = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -\ln(4) - 3$$

Vem então que a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4 é $y = \frac{3}{4}x - \ln(4) - 3$.

4. Considerando a função f de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, rejeitam-se os três gráficos apresentados para possível representação de f pois:

   - f tem derivada finita em todos pontos do seu domínio, logo é contínua em todos os pontos de domínio. O gráfico **A** é então rejeitado pois apresenta a função f com uma descontinuidade, sendo esta falsa.
   - $f'(0) > 0$, logo f é crescente no ponto de abcissa 0, contudo, no gráfico **C** temos que em $x = 0$ a função f é decrescente. Conclui-se assim que este gráfico não pode representar a função f.
   - $f''(x) < 0, \forall\, x \in]-\infty, 0[$, logo f apresenta concavidade virada para baixo em $\mathbb{R}^-$. No entanto, no gráfico **B**, neste intervalo é apresentada a função f com concavidade virada para cima. Desta forma, conclui-se que este gráfico também não pode representar a função f.

5. Considerando A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) \neq 0$, vem que $P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A)$. Demonstremos então a igualdade:

$$\begin{array}{rll|l} P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = & P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) - 1 + P(B) & & (1) \\ = & P(A) + P(\overline{B}) - (P(A) - P(A \cap B)) - (1 - P(B)) & & (2) \\ = & P(A) + P(\overline{B}) - P(A) + P(A \cap B) - P(\overline{B}) & & (3) \\ = & P(A \cap B) & & \end{array}$$

(1) Teorema $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(2) Teorema $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
(2) Teorema $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Como $P(A) \times P(B|A) = P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B)$ vem que $P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A)$.

■

6. Consideremos o poliedro $[NOPQRSTUV]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que $R(2,2,2)$ e que o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$.

(6.1) Por observação do poliedro retira-se que a abcissa e a ordenada de V correspondem à abcissa e ordenada de M, ponto médio do segmento TR ou do segmento OQ. Tendo em conta que o ponto R tem coordenadas $R(2,2,2)$, então Q tem coordenadas $Q(2,2,0)$. Então $M = \left(\frac{x_O + x_Q}{2}, \frac{y_O + y_Q}{2}, \frac{z_O + z_Q}{2}\right) = \left(\frac{2+0}{2}), \frac{2+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (1,1,0)$, logo V tem coordenadas $V(1,1,z)$.
Como V pertence ao plano PQV tem-se:

$$6 \times 1 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 6$$

Logo V tem coordenadas $V(1,1,6)$.

Nota: Por observação do poliedro, também se poderia concluir que $x_V = 1$ e $y_V = 1$.

(6.2) Sabe-se que se uma recta é perpendicular a um plano, então o vector director da recta é o vector normal do plano.
Ora, sendo o vector director da recta OR, o vector $\overrightarrow{OR} = R - O = (2,2,2) - (0,0,0) = (2,2,2)$, então tem-se que o vector normal ao plano que passa no ponto P e é perpendicular à recta OR é $\overrightarrow{n} = (2,2,2)$.
Como a equação geral de um plano é $ax + by + cz + d = 0$ em que (a,b,c) são as coordenadas do vector normal, o plano que pretendemos calcular tem equação geral do tipo:

$$2x + 2y + 2z + d = 0$$

Passando no ponto P de coordenadas $P(2,0,0)$ vem:

$$2 \times 2 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

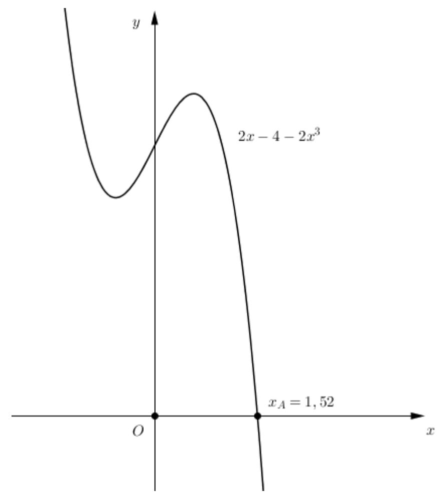
Desta forma conclui-se que a equação geral do plano que passa no ponto P e é perpendicular à recta OR é

$$2x + 2y + 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 2 = 0$$

(6.3) Sabe-se que o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa ($z = x^3$) e que pertence ao plano QRS. Este plano tem como condição $y = 2$ logo o ponto A tem coordenadas $A(x, 2, x^3)$. O vector $\overrightarrow{OA}$ é dado por $\overrightarrow{OA} = A - O = A = (x, 2, x^3)$ e o vector $\overrightarrow{TQ}$ é dado por $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2, 2, 0) - (0, 0, 2) = (2, 2, -2)$. O produto interno dos vectores anteriormente calculados é dado por:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ} = (x, 2, x^3) \cdot (2, 2, -2) = 2x + 4 - 2x^3$$

Como $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares temos que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0$, isto é, $2x - 4 - 2x^3 = 0$.
Devemos então, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, achar o zero da curva de equação $-2x^3 + 2x + 4$.
O gráfico ao lado sugere então que o zero desta curva dá-se para o ponto de abcissa $x = 1,52$ pelo que concluímos que a abcissa do ponto A, arredondada às centésimas é 1,52.



(6.4) Dispõe-se de sete cores diferentes, das quais uma é branca e outra é azul, para colorir as nove faces do poliedro $[NOPQRSTUV]$. Cada face vai ser colorida com uma única cor.
Sabe-se que cada face pode ser colorida com qualquer uma das sete cores e que, no final da experiência, o poliedro ficará com exactamente duas faces brancas, ambas triangulares e exactamente duas faces azuis, ambas quadradas. As restantes faces estão coloridas com as 5 cores que restam.
Desta forma podemos concluir que:

- Os casos possíveis são 7^9 pois cada uma das 9 faces pode ser colorida com umas das 7 cores sem qualquer restrição;
- Os casos favoráveis calculam-se tendo em conta que 2 das 4 faces triangulares estarão pintadas de branco, logo existem ${}^4C_2$ maneiras de colorir 2 das 4 faces. Sabe-se também que 2 das 5 faces quandragulares estarão pintadas de azul, logo existem ${}^5C_2$ maneiras de colorir 2 das 5 faces quandragulares. As restantes faces estarão pintadas com cores diferentes, pelo que, sobrando 5 cores (azul e branco já foram usadas), então existem 5! maneiras de pintar as restantes faces. Logo, os casos favoráveis são ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$

Desta forma, de acordo com a Lei de Laplace, vem que a probabilidade pedida é dada por

$$\frac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{7^9} \approx 0,0002$$

FIM