Cálculo Integral
Apoio a Cálculo Diferencial e Integral I

Nuno Miguel Guerreiro
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica - Instituto Superior Técnico

pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

Conteúdo

Capítulo 1

Integral de Riemann - Primitivação e Cálculo de Integrais

Introdução

Este capítulo destina-se a servir de apoio aos alunos de Cálculo Diferencial e Integral I na matéria de Integral de Riemann. Passando por uma breve introdução teórica em que serão abordados os tópicos da primitivação de funções reais de variável real e cálculo de integrais de funções reais de variável real.
Após a Introdução Teórica segue uma série de exercícios resolvidos (a grande maioria dos problemas foi criada por mim tendo ainda resolvido todos os exercícios).

1.1 Introdução Teórica

1.1.1 Introdução ao conceito de Integral

Considere-se f uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$. O integral definido desta função é dado por:

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

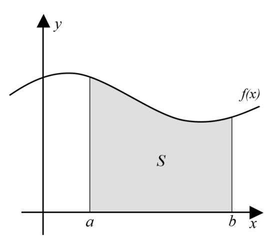

Figura 1.1: Área S representada graficamente

S pode ser definida pela expressão: $(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$. Desta forma conseguimos concluir facilmente que o integral S diz respeito à área abaixo da função f entre os pontos a e b. Existem várias motivações para o cálculo de integrais, não só em Matemática, mas também em Física em que por exemplo o trabalho realizado por uma força a actuar num dado corpo no deslocamento $[a, b]$ é dado por $W = \displaystyle\int_a^b F\,\mathrm{d}r$.
Existe um lote interminável de funções reais de variável real que podem ser funções integrandas (funções a integrar) pelo que o cálculo da primitiva destas difere caso para caso. Analisaremos funções racionais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras. Passaremos também pelos diferentes métodos de primitivação: primitivação imediata, primitivação por partes, primitivação de funções decompostas em fracções parciais e primitivação por substituição.

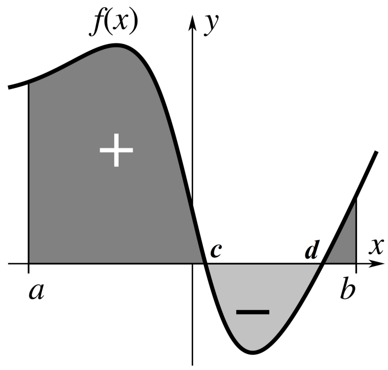

Figura 1.2: Área P definida pela região abaixo do gráfico da função f em $[a, b]$

Consideremos agora a Figura 2 acima que representa a área P. Esta área pode ser representada por três regiões diferentes: uma primeira região A em que $x \in [a, c]$, uma outra região B em que $x \in [c, b]$ e uma outra região C em que $x \in [d, c]$. Com o auxílio desta serão apresentadas algumas propriedades do operador integral tais como:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{Área } A - \text{Área } B + \text{Área } C$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
4. $\displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x$

Existem mais propriedades relacionadas com o operador integral que serão introduzidas ao longo do documento.

1.1.2 Primitivação e Cálculo de Integrais

Consideremos inicialmente a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Designa-se por integral indefinido de f em $I = [a, b]$ a função $F : I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1.2}$$

Introduzamos o **1º Teorema Fundamental do Cálculo**: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $I = [a, b]$. Então tem-se:

1. A função integral indefinido de f, F, é contínua em I.
2. Se f é contínua em $c \in]a, b[$, a função integral indefinido de f, F, é diferenciável em c e $F'(c) = f(c)$
3. F diz-se uma primitiva de f e representa-se por $\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $P(f)$.

Seguem-se algumas proposições relacionadas com o conceito de função primitiva tais como:

- Sejam F_1, F_2 duas primitivas da função f em I, então $F_1 - F_2$ é uma função constante em I.
- Duas funções com a mesma derivada não são necessariamente iguais pois podem ter desfazamento de uma constante real já que $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C_1$.

Introduzamos o **2º Teorema Fundamental do Cálculo**: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $I = [a, b]$ e seja F uma primitiva de f. Então:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \tag{1.3}$$

Esta equação é também designada de **Fórmula de Barrow** e permite procedermos ao cálculo de integrais.

Primitivas Imediatas

Existe um lote de funções integrandas cujas primitivas conseguem ser determinadas baseando apenas na definição de integral como "antiderivada". Estas funções têm primitiva fácil de determinar dando o nome de primitivas imediatas a estas mesmas.
Facilmente chegamos ao resultado de primitivas imediatas tais como:

- $\displaystyle\int a\,\mathrm{d}x = ax + C$
- $\displaystyle\int f(x)^m\, f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{m+1}}{m+1} + C$ sse $m \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log|f(x)| + C$
- $\displaystyle\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$
- $\displaystyle\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(u) + C$

A determinação da função primitiva é um passo necessário ao cálculo de integrais. Seguem-se abaixo alguns exemplos resolvidos.
Entre todas as fórmulas a de maior importância é com certeza a segunda fórmula que permite encontrar a primitiva de qualquer função em que se encontre a derivada e ela própria na expressão analítica. Para realizar estes integrais é importante notar que muitas expressões têm a função elevada a um expoente m de forma a "esconder"esta mesma.

Integração por Partes

Sejam as funções $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com funções derivadas integráveis em I. Então tem-se:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

O método de integração por partes é bastante eficaz na integração de funções logarítmicas e inversas trigonométricas tal como a função arco-tangente.
Repare-se também que sendo $f : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dada por $f(x) = \arctan x$ é também dada por $f(x) = (x)' \arctan x$.
Notar isto é particularmente importante para determinar o resultado de alguns integrais como veremos mais abaixo nos exercícios resolvidos.

Integração por Substituição

Seja a função f contínua em $[a, b]$ e $\phi : [\alpha, \theta] \to [a, b]$ diferenciável com derivada integral em $[\alpha, \theta]$, tal que $a = \phi(\alpha)$ e $b = \phi(\theta)$.
Então a função $f(\phi(t)) \cdot \phi'$ é integrável em $[\alpha, \theta]$ e

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\theta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

O método de integração por substituição é particularmente útil no cálculo de integrais com raízes quadradas em que não existe uma outra função a multiplicar por esta que possa, com a devida manipulação, ser a derivada da função a "sofrer"a operação da raíz quadrada como por exemplo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Tome outro caso em que a substituição pode ser usada: no cálculo das soluções da equação $a \log^2(x) + b \log x + c = 0$ usaria a substituição $y = \log x$ tal que a equação se tornaria $ay^2 + by + c = 0$ que é de fácil resolução. Em casos como este, casos em que existem substituições evidentes, o método da integração por substituição também é eficaz. É de se reparar também na expressão (5) que o método exige três importantes passos:

1. Substituição da variável a integrar na expressão analítica da função f para a variável de substituição. (Na expressão (5) temos a mudança de integração em x para integração em t)

2. Substituição dos limites de integração; tome por exemplo o integral em $[1, e]$ em ordem a x para o integral em ordem a u tal que $u = \log x$ então temos os novos limites de integração $[\log 1, \log e] = [0, 1]$.

3. Substituição do operador dx para dx_n da variável a substituir; Considere o exemplo $u = -x$, tem-se então que d$u = -$dx em que se derivou ambos os termos em ordem às variáveis de cada termo. Desta forma tem-se d$x = -$du e deve-se proceder a essa mudança no integral a calcular.

A realização destes três passos leva **sempre** à substituição correcta. Normalmente a substituição torna a função a integrar susceptível a uma integração imediata.

Integração de Funções Racionais

Nesta secção analisaremos a determinação de integrais quando a função integranda é uma função racional. Este método é o método que envolve mais prática e é mais susceptível a erros.
A função racional $\dfrac{p}{q}$ em que p e q são polinómios é representada por uma fracção própria se o grau do polinómio numerador for menor que o grau do polinómio de nominador, e representada por uma fracção imprópria caso contrário.

Para o cálculo de integrais em que a função integranda é uma função racional é necessária a análise de dois casos diferentes:

1. **Grau do numerador é maior que o grau do denominador**, em que se efectua uma divisão inteira (método de divisão da primária)

2. **Grau do numerador é menor que o grau do denominador**, em que é necessário decompôr a função integranda em fracções parciais.

O método de fracções parciais pode ser explicado considerando os polinómios q_1 e q_2 e p tal que o grau $p <$ grau $(q_1 \cdot q_2)$. Então existem polinómios p_1 e p_2 tais que:

$$\frac{p(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \tag{1.6}$$

Outra noção muito importante a ter em conta segue-se em baixo:
Sejam $a \in \mathrm{R}$ e p, q_1 polinómios tais que grau $p < n +$ grau q_1 e $q_1(a) \neq 0$. Então

$$\frac{p(x)}{q_1(x)(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{x-a} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)}, \tag{1.7}$$

em que grau $p_1 <$ grau q_1 e

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{p}{q-1} \right)^{k-1} (a) \quad k = 1, 2, ..., n$$

Em fracções em que o denominador toma a forma de um polinómio do tipo $ax^2 + bx + c$, o numerador A toma a forma de um polinómio do tipo $Ax + B$ em que A e B são constantes reais. No caso do polinómio ax^2 as duas formas são possíveis: $\dfrac{Ax + B}{x^2}$ ou $\dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x}$.

Tenha em conta, por exemplo, a função racional $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}\backslash\{0,1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$. Pretendemos decompôr esta fracção em fracções parciais tal que:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}$$

Reparemos agora que para o denominador ficar igual a $x^2(x-1)$ devemos multiplicar A por $x-1$, B por $x(x-1)$ e ainda C por x^2 tal que temos:

$$\frac{A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

O passo seguinte é separar o denominador em termos de segundo grau, primeiro grau e grau zero de forma a termos um sistema de três equações em que os coeficientes referentes aos termos de segundo, primeiro e grau zero são dados pelo numerador da função racional que neste caso é 1, logo $0x^2 + 0x + 1$ vindo então:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A - B = 0 \\ -A = 1 \end{cases}$$

De onde concluímos facilmente que $A = -1$, $B = 1$ e $C = -1$, tal que temos

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

Caso usemos o outro processo correcto temos então:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

Devemos então multiplicar $Ax + B$ por $x-1$ e C por x^2 tal que temos:

$$\frac{(Ax+B)(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

Tal como anteriormente devemos agora separar os termos por ordem do seu grau pelo que temos então:

$$\frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)}$$

Resolvemos então o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A - B = 0 \\ -B = 1 \end{cases}$$

De onde concluímos facilmente que $B = -1$, $A = 1$ e $C = -1$ portanto temos então:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-1}$$

que era a expressão que tínhamos encontrado usando o primeiro método.

1.2 Exemplos Resolvidos

Existe, como referido anteriormente, um lote enorme de funções que têm primitiva imediata pelo que abaixo seguem alguns dos exemplos mais importantes. Nos primeiros exercícios o cálculo das funções primitivas será feito com mais cuidado do que nos exercícios finais em que o aluno já deverá entender a omissão de alguns passos.

Problema 1

Determine o valor dos integrais:

$$(i)\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (ii)\int_2^3 \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x \qquad (iii)\int_0^1 \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x \qquad (iv)\int_0^1 x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$(v)\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{\log(2x)}{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x \quad (vi)\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad (vii)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x \quad (viii)\int_1^2 \frac{1}{x(4+\log^2(x))}\,\mathrm{d}x \quad (ix)\int_0^{\log(2)} \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,\mathrm{d}x$$

$$(x)\int_3^8 \frac{1}{x(\sqrt{x+1}+1)}\,\mathrm{d}x \quad (xi)\int_0^1 \arctan(5x)\,\mathrm{d}x \quad (xii)\int_{\log\frac{2}{3}}^0 \frac{e^x}{(2-e^x)\sqrt{1-e^x}}\,\mathrm{d}x \quad (xiii)\int_0^1 \frac{\log(x)+1}{x(\log^2(x)-\log(x)-2)}\,\mathrm{d}x$$

Soluções:

(i) $\frac{1}{2}(e-1)$ (ii) $\log(2)+\arctan(3)-\arctan(2)$ (iii) $2\left[\arctan(2)-\frac{\pi}{3}\right]$ (iv) $\frac{1}{2}[\sin(2)+2\cos(2)]$ (v) $2-\sqrt{e}$

(vi) $\frac{2}{15}(1+\sqrt{2})$ (vii) $\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{2}{1+e}\right)+1\right]$ (viii) $2\arctan\left(\log\sqrt{2}\right)$ (ix) $2\left[\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ (x) $\log\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{12}$

(xi) $\arctan(5)-\frac{1}{10}\log 26$ (xii) $\frac{\pi}{3}$ (xiii) $-\log 2$

Resolução

Nesta secção apresentarei uma resolução possível para cada integral. Nos primeiros integrais, os passos serão explicados com mais cuidado pelo que à chegada dos últimos alguns passos serão omitidos devido à repetição indevida de passos já apresentados em alíneas anteriores.

Alínea (i)

Pretendemos calcular o valor do integral $\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Neste tipo de integrais em que existe um produto de um polinómio e uma exponencial, por norma, conseguimos arranjar uma manipulação matemática de forma a que o polinómio a multiplicar represente a derivada do expoente da exponencial. Neste caso o expoente da exponencial é x^2 pelo que a sua derivada é $2x$. Este é o passo correcto pois reparemos que a derivada de e^u é $u'e^u$, portanto ao conseguir termos a derivada do expoente a multiplicar pela exponencial, temos a primitiva encontrada.

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

Alínea (ii)

Na introdução teórica foram apresentados os dois métodos possíveis para resolução de integrais em que a função integranda se trata de uma função racional. Tendo em conta que o grau do denominador é maior que o grau do numerador temos de proceder à decomposição em fracções parciais.

Facilmente obtemos, pela Regra de Ruffini, a igualdade: $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$. Reparemos então que o denominador tem então um polinómio de grau 1 e um polinómio de grau 2 pelo que a decomposição em fracções parciais vem:

$$\frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Repare-se que o termo $Bx+C$ surge devido ao polinómio x^2+1 ser de segundo grau.

Desta forma temos então:

$$(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)=x^2+x \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ C-B=1 \\ A-C=0 \end{cases}$$

A solução do sistema é trivial vindo então $A = C = 1$ e $B = 0$ tendo então que $\dfrac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2+1}$.

O integral a calcular é então

$$\int_2^3 \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x = \left[\log|x-1| + \arctan x\right]_2^3 = \log 2 + \arctan 3 - \arctan 2$$

Alínea (iii)

Após leitura da introdução teórica deve ser imediata a percepção de que este integral deve ser calculado usando o Método da Substituição, isto porque temos uma raíz quadrada na nossa expressão o que torna a substituição um método bastante eficaz.

Nestes casos a substituição mais eficaz é do tipo $u = \sqrt{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n}$, ou seja, neste caso $u = \sqrt{x+3}$.

Procedamos agora à realização dos três passos essenciais para o uso do método de substituição:

1. **Alteração da expressão da função integranda**: Sendo $u = \sqrt{x+3}$ temos $x = u^2 - 3$ pelo que a expressão dada toma a forma $\dfrac{1}{(u^2+1)(u)}$.

2. **Alteração do operador diferencial**: Na nossa expressão temos $\mathrm{d}x$ mas neste momento a substituição exige que tenhamos o operador $\mathrm{d}u$ vindo então que sendo $u^2 = x+3$ vem diferenciando em ambos os lados em relação a cada uma das variáveis $2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ pelo que no nosso integral original devemos substituir $\mathrm{d}x$ por $2u\,\mathrm{d}u$.

3. **Alteração dos limites de integração**: Os limites de integração que temos no integral original estão em relação à variável x pelo que precisamos de os colocar em relação à variável u vindo então que para $x = 1$ temos $u = \sqrt{1+3} = 2$ e para $x = 0$ temos $u = \sqrt{0+3} = \sqrt{3}$.

O integral após substituição toma a forma:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2u\,\mathrm{d}u}{(u^2+1)u} = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$$

O integral é de fácil resolução agora vindo então que:

$$\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\left[\arctan u\right]_{\sqrt{3}}^2 = 2\left[\arctan 2 - \frac{\pi}{3}\right]$$

Alínea (iv)

Este tipo de função integranda que se baseia no produto de um polinómio de igual ou maior grau ao que se encontra na função trigonométrica exige sempre a utilização do Método de Integração por Partes. Este método exige a escolha de uma função que tenha primitiva fácil, contudo, neste caso ambas as funções (polinómio e trigonométrica) têm primitiva trivial. Nestes casos, a primitiva a escolher é **sempre** a função trigonométrica uma vez que a escolha da função polinomial leva a um ciclo sem fim de integrações por partes. Este tipo de integral também exige normalmente duas integrações por partes.

Temos então:

$$\int_0^1 x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2\sin(2x)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

Em que a primitiva escolhida foi a primitiva de $\cos(2x)$ dada por $\displaystyle\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2}$. Reparemos também que mais uma integração por partes é necessária para calcular $\displaystyle\int_0^1 x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

Temos então:

$$\int_0^1 x\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\cos(2x)}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\cos(2x)}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^1$$

Ou seja, o integral pedido é dado por:

$$\int_0^1 x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2\sin(2x)}{2}\right]_0^1 - \left[-\frac{x\cos(2x)}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left[\sin(2) + 2\cos(2)\right]$$

Alínea (v)
Como referido na introdução teórica, o Método de Integração por Partes torna-se bastante eficaz para calcular integrais em que as funções integrandas são funções trigonométricas ou logarítmicas. Repare-se que a função que multiplica pela função logarítmica não consegue, por via de manipulação, tornar-se na expressão da derivada da função logarítmica pelo que a primitiva imediata não é aplicável.
Quando integramos por partes funções integrandas que contém logaritmos, a função que multiplica por esta última é sempre a escolhida para primitivar. Procuramos primeiramente a primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x$. Temos então:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x = \int (2x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2(2x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x}$$

Primitivando então por partes a função integranda vem:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{\log(2x)}{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{2x}\log(2x)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{2\sqrt{2x}}{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{2x}\log(2x)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\sqrt{2x}\log(2x) - 2\sqrt{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} = 2-\sqrt{e}$$

Alínea (vi)
Este integral tem duas formas possíveis de ser calculado podendo nós optar pelo Método de Integração por Substituição ou pelo Método de Integração por Partes. Optarei pelo uso do Método de Integração por Substituição por tornar o cálculo bastante mais fácil.
A substituição é evidente uma vez que a função integranda é dada por $x^3\sqrt{1+x^2}$. Tal como explicado na alínea (iii), a substituição é $u = \sqrt{1+x^2}$.
Repare-se que se $u = \sqrt{1+x^2}$ então $u^2 = 1+x^2$ e tem-se $2u\,\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ pelo que vem $\mathrm{d}x = \dfrac{2u}{2x}\mathrm{d}u = \dfrac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$ em que se substituiu x por $x = \sqrt{u^2-1}$. Temos ainda que efectuar a substituição dos limites de integração pelo que temos então para $x=1$, $u = \sqrt{2}$ e para $x = 0$, $u = 0$.
Desta forma obtém-se a substituição completa dada por:

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \left[\sqrt{u^2-1}\right]^3 \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} = \int_1^{\sqrt{2}} (u^2-1)u^2\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{15}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Alínea (vii)
Este tipo de integral é outro tipo de integral que sugere substituição. Neste caso uma substituição eficaz é $u = e^x$ pelo que temos então $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$, portanto temos $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{e^x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$. Temos ainda a troca de limites de integração tal que para $x = \dfrac{1}{2}$ vem $u = \sqrt{e}$ e para $x = 0$ vem $u = 1$.
O integral que pretendemos calcular toma então a forma:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{u(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador devemos proceder à decomposição em fracções parciais tal que:

$$\frac{1}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2}$$

Repare-se que o termo $Bx+C$ justifica-se pelo facto de $1+u^2$ ser um polinómio de segundo grau. Temos então:

$$A(1+u^2) + (Bu+C)(u) = (A+B)u^2 + Cu + A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

A solução é trivial e vem então $A=1$, $B=-1$ e $C=0$ pelo que temos: $\dfrac{1}{u(1+u^2)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{u}{1+u^2}$
O integral a calcular é então:

$$\int_1^{\sqrt{e}} \left[\frac{1}{u} - \frac{u}{1+u^2}\right]\,\mathrm{d}u = \left[\log u\right]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}\left[\log(1+u^2)\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2}(-\log(1+e) + \log(2) + 1) = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{2}{1+e}\right)+1\right]$$

Alínea (viii)
Este é um integral que pode ser calculado usando Primitivação Imediata ou Integração por Substituição realizando a substituição $u = \log x$. Neste caso, optarei pela Primitvação Imediata.
Temos então que $\dfrac{1}{x(4+\log^2(x))} = \dfrac{\frac{1}{x}}{4+(\log x)^2} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{\log x}{2}\right)^2}$. Para tornar esta função como a derivada de uma função arco-tangente temos de ter no numerador a derivada de u tal que a função integranda é $\dfrac{u'}{1+u^2}$. Repare-se que neste caso $u = \dfrac{\log x}{2}$ pelo que $u' = \dfrac{1}{2x}$ e então tem-se

$$\frac{1}{x(4+\log^2(x))} = 2\frac{\frac{1}{2x}}{1+\left(\frac{\log x}{2}\right)^2}$$

Por fim:

$$\int_1^2 \frac{1}{x(4+\log^2(x))}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{\frac{1}{2x}}{1+\left(\frac{\log x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\arctan\left(\frac{\log x}{2}\right)\right]_1^2 = 2\arctan\left(\frac{\log 2}{2}\right) = 2\arctan(\log\sqrt{2})$$

Alínea (ix)
Pretendemos calcular o valor do integral $\displaystyle\int_0^{\log(2)} \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,\mathrm{d}x$ pelo que temos então

$$\int_0^{\log(2)} \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\log(2)} \frac{e^x}{(e^x)^2+4}\mathrm{d}x$$

Nestes casos em que temos uma função integranda do tipo: $\dfrac{u'}{u^2+c}, c \in \mathbb{R}$ devemos sempre tornar o denominador em algo do tipo $\dfrac{u^2}{c}+1 = \left(\dfrac{u}{\sqrt{c}}\right)^2+1$ pois repare-se que $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{u^2+1}$. Seguidamente devemos tornar o numerador na expressão da derivada de u; neste caso temos $u = \dfrac{e^x}{2}$ pelo que $u' = \dfrac{e^x}{2}$ e existe necessidade de alterar o numerador pois $u' = \dfrac{e^x}{2}$ e o numerador que temos é e^x. É necessário também alterar o denominador tal que temos $e^{2x}+4 = \dfrac{e^{2x}}{4}+1 = \left(\dfrac{e^x}{2}\right)^2+1$ e portanto vem:

$$\int_0^{\log(2)} \frac{e^x}{\left(\frac{e^x}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\log(2)} \frac{\frac{e^x}{2}}{\left(\frac{e^x}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\left[\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right)\right]_0^{\log(2)} = 2\left[\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

Alínea (x)
Tal como na alínea (iii), este é um integral que sugere substituição trivial dada por $u = \sqrt{x+1}$ tal que se tem $u^2 = x+1$ e portanto tem-se $2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ e ainda os limites de integração alterados dados por $u = \sqrt{8+1} = 3$ para $x = 8$ e $u = \sqrt{3+1} = 2$ para $x = 3$.
Desta forma tem-se:

$$\int_3^8 \frac{1}{x(\sqrt{x+1}+1)}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{2u\mathrm{d}u}{(u^2-1)(u+1)} = \int_2^3 \frac{2u}{(u+1)^2(u-1)}\,\mathrm{d}u$$

É necessário decompôr esta função em fracções parciais tal que se tem:

$$\frac{A}{u+1} + \frac{B}{(u+1)^2} + \frac{C}{u-1} = \frac{A(u+1)(u-1)+B(u-1)+C(u+1)^2}{(u+1)^2(u-1)}$$

Tem-se então a igualdade

$$u^2(A+C)+u(B+2C)+(-A-B+C) = 2u \Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B+2C=1 \\ -A-B+C=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se $A = -\dfrac{1}{2}$, $B = 1$ e $C = \dfrac{1}{2}$. Desta forma o integral a calcular é dado por:

$$\int_2^3 \left(-\frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{2(u-1)}\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\log|u+1| - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{2}\log|u-1|\right]_2^3 = \log\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}$$

Alínea (xi)

Tal como referido na introdução teórica o método de integração por partes é bastante útil no cálculo de integrais em que a função integranda é uma função trigonométrica. Neste caso, tratamos a função inversa da função tangente pelo que o integral é dado por:

$$\int_0^1 \arctan(5x)\,\mathrm{d}x = [x\arctan(5x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{5x}{1+(5x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Repare-se que

$$\frac{5x}{1+(5x)^2} = \frac{5x}{1+25x^2} = \frac{1}{10}\left(\frac{50x}{1+25x^2}\right)$$

Desta forma tem-se facilmente que

$$\int_0^1 \frac{5x}{1+(5x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int_0^1 \frac{50x}{1+25x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}\log(1+25x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{10}\log 26$$

Então o integral pedido tem valor:

$$\int_0^1 \arctan(5x)\,\mathrm{d}x = \arctan(5) - \frac{1}{10}\log 26$$

Alínea (xii)
Tal como na alínea (vii), este tipo de integral é outro tipo de integral que sugere substituição. Neste caso uma substituição eficaz é $u = \sqrt{1-e^x}$, pelo que vem $u^2 = 1 - e^x$ o que leva a concluir que $e^x = 1 - u^2$ e ainda $2u\,\mathrm{d}u = -e^x\,\mathrm{d}x$ e substituindo vem $\mathrm{d}x = \dfrac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$. Prossegue-se agora para a mudança dos limites de integração vindo então $u = 0$ para $x = 0$ e $u = \sqrt{1-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ para $x = \log\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

Efectuando então a substituição vem:

$$\int_{\log\frac{2}{3}}^{0} \frac{e^x}{(2-e^x)\sqrt{1-e^x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \frac{1-u^2}{(1+u^2)u}\cdot\frac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = -2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [-2\arctan u]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} = 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Alínea (xiii)
Tal como na alínea anterior, este tipo de integral é outro tipo de integral que sugere substituição. Neste caso uma substituição eficaz é $u = \log x$ e então tem-se $x = e^u$ e portanto $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ vindo então $\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}u = e^u\,\mathrm{d}u$. Efectuando a alteração dos limites de integração tem-se $u = 1$ para $x = e$ e $u = 0$ para $x = 1$.
Vem então:

$$\int_0^1 \frac{\log(x)+1}{x[\log^2(x)-\log(x)-2]}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{(u+1)e^u}{(u^2-u-2)e^u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1\frac{u+1}{u^2-u-2}\,\mathrm{d}u$$

Tendo em conta que $u^2-u-2 = (u+1)(u-2)$ temos que o integral pedido é trivial sendo dado por:

$$\int_0^1 \frac{1}{u-2}\,\mathrm{d}u = [\log|u-2|]_0^1 = -\log|-2| = -\log 2$$

Problema 2

Calcule a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{x+1}{1+x^2} \quad e \quad f(0) = 1$$

Resolução

Tenhamos em conta que $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$, $\forall x \in$ R pelo que devemos então calcular a primitiva de f' vindo então:

$$\int\frac{x+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log|1+x^2| + \arctan(x) + C$$

Repare-se que o uso do módulo em $\log|1+x^2|$ não é necessário uma vez que $1+x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Pretendemos ainda satisfazer a condição $f(0) = 1$ e tendo em conta que $f(x) = \dfrac{1}{2}\log|1+x^2| + \arctan(x) + C$ temos $f(0) = \dfrac{1}{2}\log(1) + \arctan(0) + C = C$ pelo que então $C = 1$. Conclui-se portanto que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\log|1+x^2| + \arctan(x) + 1$$

Problema 3

Considere o Polinómio de Taylor de 2ª ordem da função f em $x = a$ dado por:

$$p_2(a) = 1 + \frac{(x-a)^2}{2\left[\cos^2 x(1+\tan^2 x)\right]_{x=a}}$$

(a) Verifique que $x = a$ não é um ponto de máximo absoluto de f para todo e qualquer valor de a.
(b) Defina a função f.

Resolução

(a) Tendo em conta que o Polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto $x = a$ é dado por

$$f(x-a) = p_n(a) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Temos que o Polinómio de Taylor de segunda ordem equivale a $n = 2$ vindo então:

$$p_2(a) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}$$

Repara-se facilmente que $f'(a) = 0$ pelo que $x = a$ é um ponto de estacionaridade. Para verificar que é um ponto de mínimo temos de ter $f''(a) > 0$ pelo que vem:

$$f''(x) = \frac{1}{\cos^2 x(1+\tan^2 x)}$$

Nota-se facilmente que $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, portanto para $x = a$ temos $f''(a) > 0$ e então $x = a$ não é um ponto de máximo absoluto de f para qualquer valor real.

(b) Temos de definir a função f tendo em conta o seguinte conjunto de condições:

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x(1+\tan^2 x)} \\ f'(a) = 0 \\ f(a) = 1 \end{cases}$$

Repare-se que $f''(x) = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1+\tan^2 x}$ e portanto de acordo com a identidade trigonométrica $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ tem-se $f''(x) = 1$. Integrando $f''(x)$ obtem-se $f'(x)$ tal que:

$$f'(x) = \int_0^x f''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x 1\,\mathrm{d}x = x + c_1$$

Sendo $f'(a) = 0$ temos $f'(a) = a + c_1 = 0$ e então $c_1 = -a$. Desta forma tem-se $f'(x) = x - a$.
Integrando $f'(x)$ obtem-se $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - ax + c_2$$

Sendo $f(a) = 1$ vem $\dfrac{a^2}{2} - a^2 + c_2 = 1$ de onde se conclui $c_2 = 1 + \dfrac{a^2}{2}$.
Concluímos finalmente que

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - ax + 1 + \frac{a^2}{2}$$

Problema 4

Seja f uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^+$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x(c+\log^2 x)},\ c \in \mathbb{R}$$

Considere ainda F, função primitiva de f também definida em $\mathbb{R}^+$.

(a) Mostre que se $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \log 2$, então $c = \dfrac{4\log^2 2}{\pi^2}$.

(b) Mostre que se $c = 3$, então o Polinómio de Taylor de 1ª ordem de F no ponto $x = e$ é dado por $p_1(e) = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6} + \dfrac{x-e}{4e}$.

Resolução

(a) Calculemos a primitiva de f tendo em conta que

$$\frac{1}{x(c+\log^2 x)} = \frac{\frac{1}{x}}{c+\log^2 x} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{\log x}{\sqrt{c}}\right)^2} = \sqrt{c}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{c}x}}{1+\left(\frac{\log x}{\sqrt{c}}\right)^2}$$

Vem então que

$$\int \frac{1}{x(c+\log^2 x)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{c}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{c}x}}{1+\left(\frac{\log x}{\sqrt{c}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{c}\,\arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{c}}\right)$$

Sendo $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ e sendo $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{c}\,\arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{c}}\right) = \sqrt{c}\,\frac{\pi}{2} = \log 2$$

Conclui-se então que $c = \dfrac{4\log^2 2}{\pi^2}$, como queríamos demonstrar.

(b) Tendo em conta que a primeira derivada de F é f temos então que o Polinómio de Taylor de 1ª ordem no ponto $x = e$ da função F é dado por

$$p_1(e) = F(e) + f(e)(x-e)$$

Se $c = 3$ então $F(x) = \sqrt{c}\,\arctan\left(\dfrac{\log x}{\sqrt{c}}\right) = \sqrt{3}\,\arctan\left(\dfrac{\log x}{\sqrt{3}}\right)$ e portanto $F(e) = \sqrt{3}\,\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Tem-se ainda que para $c = 3$ vem $f(x) = \dfrac{1}{x(3+\log^2 x)}$ e portanto $f(e) = \dfrac{1}{e(3+\log^2 e)} = \dfrac{1}{e(3+1)} = \dfrac{1}{4e}$.

Conclui-se então que, como queríamos demonstrar, o Polinómio de Taylor de 1ª ordem no ponto $x = e$ da função F é dado por

$$p_1(e) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{x-e}{4e}$$

Problema 5

Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{3-\cos x}$$

Calcule a constante k tal que $k \in \mathbb{R}$ para a qual se verifica $\lim\limits_{x\to+\infty} k\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \pi$

Sugestão: Use a substituição $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e considere a identidade trigonométrica $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Resolução

Calculemos primeiramente o integral pedido. Considerando a substituição sugerida temos $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e portanto $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$. Tendo a identidade trigonométrica $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ tem-se $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ e portanto vem que $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ e conclui-se que tomando a substituição $\mathrm{d}u = \dfrac{1+u^2}{2}\,\mathrm{d}x$ equivalente a $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$.
Efectuando a substituição no integral temos

$$\int \frac{1}{3-\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3-\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \frac{1+u^2}{3+3u^2-1+u^2}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2}{2+4u^2}\,\mathrm{d}u$$

Repare-se que $\dfrac{2}{2+4u^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}u)^2}$ e portanto vem:

$$\int \frac{2}{2+4u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\arctan(\sqrt{2}u)}{\sqrt{2}} = \frac{\arctan\left(\sqrt{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sqrt{2}}$$

Como temos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ e sabendo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} k\int f(x)\,\mathrm{d}x = \pi$ vem $\dfrac{k\pi}{2\sqrt{2}} = \pi$ i.e $k = 2\sqrt{2}$.

Nota: Considerou-se a constante de integração como nula.

Problema 6

Seja $g \in C(\mathbb{R})$ uma função periódica de período $T > 0$,i.e, $g(x+T) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Mostre que a função

$$\psi(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

é periódica de período T se e só se $\displaystyle\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Resolução

Se ψ é periódica de período T então $\psi(0) = \psi(T)$, então:

$$\psi(0) = \psi(T) \Leftrightarrow 0 = \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t$$

Supondo então que $\displaystyle\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t =$ vem:

$$\psi(x+T) = \int_0^{x+T} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_T^{x+T} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Seja agora $u = t - T$ tal que $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ e então para $t = T$ vem $u = 0$ e para $t = x + T$ vem $u = x$. Substituindo:

$$\int_T^{x+T} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x g(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u$$

o que evidencia que a função ψ é periódica de período T.

Problema 7

Considere f contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{-x^2}$.
Responda às alíneas seguintes tendo em conta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

(a) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -2x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -ax^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\sqrt{\frac{\pi a^2}{4}}\ \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Utilize o método de integração por partes e considere que $[\psi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} \psi(x)$

Resolução

(a) Analisemos o integral pedido utilizando o Método de Integração por Partes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -2x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(-2xe^{-x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[xe^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Tendo em conta a sugestão dada determinemos agora o valor de $\left[xe^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}$. Para tal calculemos o limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

Em que se aplicou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$, tendo então que $\left[xe^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$.
Assim conclui-se, como pretendido, que o valor do integral é dado por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -2x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) Analisemos o integral pedido utilizando o Método de Integração por Partes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -ax^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ax}{2}\left(-2xe^{-x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{axe^{-x^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Pelo raciocínio em (a) tem-se que $\left[\dfrac{axe^{-x^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, pelo que chegamos facilmente ao pretendido

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -ax^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{2}\sqrt{\pi} = -\sqrt{\frac{\pi a^2}{4}}, \forall\, a \in \mathbb{R}$$

Problema 8

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que se F é uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = F(b)F'(b) - F(a)F'(a) - \int_a^b F(x)F''(x)\,\mathrm{d}x$$

Resolução

Tendo em conta que $f^2(x) = f(x)f(x)$ e sabendo que se F é uma primitiva de f então $F' = f$ e portanto $F'' = f'$.
Utilizando o Método de Integração por Partes, concluímos o pretendido:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(b)F(b) - f(a)F(a) - \int_a^b F(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = F(b)F'(b) - F(a)F'(a) - \int_a^b F(x)F''(x)\,\mathrm{d}x$$

Repare-se que $f(b) = F'(b)$ e $f(a) = F'(a)$.

Problema 9

Prove pelo Método de Indução Matemática a seguinte hipótese

$$\int x^n e^x \,\mathrm{d}x = e^x \left[x^n - \frac{d}{dx}x^n + \frac{d^2}{dx^2}x^n - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}x^n \right], n \in \mathbb{N}$$

Resolução

Para provarmos uma hipótese pelo Método de Indução Matemática devemos realizar dois passos indutivos. Comecemos por mostrar que a hipótese se verifica para $n = 1$:

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

Repare-se que substituindo na nossa hipótese n por $n = 1$ segue:

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x = e^x \left[x^1 - \frac{d}{dx}x^1 + \frac{d^2}{dx^2}x^1 \cdots \right] = e^x(x-1)$$

A hipótese é verdadeira para $n = 1$. Consideremos agora $n = k$ e procedamos à verificação da hipótese para $P(k+1)$. Isto é, se $P(1)$ se verifica então $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, de acordo com o Método de Indução Matemática. Para tal verifiquemos que na nossa hipótese teremos a seguinte expressão:

$$e^x \left[x^{k+1} - \frac{d}{dx}x^{k+1} + \frac{d^2}{dx^2}x^{k+1} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}x^{k+1} \right]$$

Integrando temos

$$\int x^{k+1} e^x \,\mathrm{d}x = x^{k+1}e^x - \int (k+1)\, e^x x^k \,\mathrm{d}x = x^{k+1}e^x - (k+1) \int e^x x^k \,\mathrm{d}x$$

Substituindo $\int e^x x^k \,\mathrm{d}x$ pela hipótese de indução tem-se:

$$\int x^{k+1} e^x \,\mathrm{d}x = x^{k+1}e^x - (k+1)\, e^x \left[x^k - \frac{d}{dx}x^k + \frac{d^2}{dx^2}x^k - \cdots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}x^k \right]$$

Note-se que $\frac{d}{dx}x^{k+1} = (k+1)\, x^k$ pelo que vem:

$$e^x \left[x^{k+1} - (k+1)x^k + (k+1)\frac{d}{dx}x^k - (k+1)\frac{d^2}{dx^2}x^k - \cdots + (-1)^k(k+1)\frac{d^k}{dx^k}x^k \right]$$

Tendo em conta que $\frac{d^k}{dx^k}(k+1)x^k = (k+1)\frac{d^k}{dx^k}x^k$ e que $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}x^{k+1} = (k+1)\frac{d^k}{dx^k}x^k$, temos:

$$\int x^{k+1} e^x \,\mathrm{d}x = e^x \left[x^{k+1} - \frac{d}{dx}x^{k+1} + \frac{d^2}{dx^2}x^{k+1} - \cdots + (-1)^n \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}x^{k+1} \right]$$

Verificando-se então também $P(k+1)$.
A hipótese está então provada pelo Método de Indução Matemática. $\square$

Capítulo 2

Integral Indefinido - Derivação da Função Integral Indefinido

Introdução

Este documento destina-se a servir de apoio aos alunos de Cálculo Diferencial e Integral I na matéria de Integrais Indefinidos. Começando com uma breve introdução teórica, o documento é composto por mais de uma dezena de exercícios resolvidos que explora conteúdos úteis para a disciplina como o Teorema de Cauchy, integração por substituição e Polinómio de Taylor.
Após a Introdução Teórica segue uma série de exercícios resolvidos (a grande maioria dos problemas foi criada por mim tendo ainda resolvido todos os exercícios).

2.1 Introdução Teórica

O integral indefinido de $f(x)$ é a família de funções definida por:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, c \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Tal que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, $i.e$, $F'(x) = f(x)$.

Relembremos que a partir do Teorema Fundamental do Cálculo vem que:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) \tag{2.2}$$

vindo ainda que a função integral indefinido de uma função contínua é diferenciável e é uma primitiva da função integranda.
Defina-se $\phi(x) = \displaystyle\int_a^x 2t\,\mathrm{d}t$, a $\in \mathbb{R}$, uma função integral indefinido definida em todo o $\mathbb{R}$. Ora pelas noções básicas do cálculo integral vem que $\phi(x) = \displaystyle\int_a^x 2t\,\mathrm{d}t = x^2 - a^2$ e portanto é fácil dizer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - a^2) = 2x$. Este é um resultado imediato da noção de primitiva uma vez que a derivada da função definida pela primitiva da função integranda é a própria função integranda ($F'(x) = f(x)$). Vindo então que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{2.3}$$

Contudo, será que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^{2x} f(t)\,dt = f(2x)$? Analisando então a função $\psi(x) = \displaystyle\int_a^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$ definida em todo o $\mathbb{R}$ vem que a sua derivada é dada por: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(2x) - F(a)) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(2x) = (2x)'F^{'}(2x) = 2f(2x) \neq f(2x)$.

Em que se aplicou a Regra da Derivada da Função Composta no passo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(2x) = (2x)'F^{'}(2x)$.

Repare-se então que a partir do Teorema da Derivada da Função Composta vem que a função integral indefinido definida por uma função composta é também contínua caso a função g seja contínua tal que o resultado que pretendemos obter é o resultado do integral: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.
A partir deste momento pode-se omitir alguns passos na resolução da derivada do integral indefinido tal como o cálculo da primitiva da função integranda.
Tem-se então que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F^{'}(g(x)) \cdot g'(x)$$

E como vem que $F' = f$ tem-se, por fim:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x)) \cdot g'(x) \tag{2.4}$$

2.2 Exercícios Resolvidos

Segue-se uma colectânea de exercícios resolvidos em que vão ser profundamente explorados os conteúdos referidos acima, assim como outras noções da disciplina como o Teorema de Cauchy para cálculo de limites e o Polinómio de Taylor.

Problema 1

Considere a função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{x}{2}} \sin(\mathrm{e}^{-t^2})\,\mathrm{d}t$.

(a) Determine a expressão geral de $\psi^{'}$.
(b) Considerando $\psi(0) = a$, determine o Polinómio de Taylor de primeira ordem da função ψ na origem.

Resolução

(a) A função $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sin(\mathrm{e}^{-t^2})\,\mathrm{d}t$ é a função integral indefinido de uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Considerando $g(x) = \dfrac{x}{2}$ contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, resulta que $\psi(x) = F(g(x))$ pelo que então $\psi(x)$ é também uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.
Estamos então nas condições de calcular a primeira derivada de ψ dada por:

$$\psi^{'}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)' \cdot \sin\left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$

(b) O Polinómio de Taylor de primeira ordem da função ψ na origem pode ser calculado facilmente pelo que recorrendo à definição do Polinómio de Taylor temos:

$$p_n(a)) = f(x-a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Procuramos então o Polinómio de Taylor para $n = 1$ e $a = 0$ pelo que vem então:

$$p_1(0) = \psi(0) + \psi^{'}(0) \cdot x = a + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{0}{2}\right)^2}\right) \cdot x = a + \frac{\sin(1)}{2} \cdot x$$

Nota: Verifica-se então que não é necessário o cálculo da primitiva da função integranda. Repare-se que não se achou a primitiva de $g(x) = \sin(e^{-t^2})$. Como referido anteriormente, para o cálculo da derivada da função integral indefinido não é necessário o cálculo da primitiva da função integranda.

Problema 2

Considere a igualdade:

$$\frac{x^3}{3}+x^4=\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

(a) Defina uma função contínua g num subconjunto D de $\mathbb{R}$ tal que para $x\in D$, a igualdade acima se verifica.

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\arctan(x)}\tan(t)\,\mathrm{d}t}{g(x)}$

Resolução

(a) Reparemos que se duas funções são iguais então as suas derivadas também o são, *i.e*, se $f(x)=h(x)$ então $f'(x)=h'(x)$ e portanto consideremos as funções f e g tal que $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^4$ e $h(x)=\displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^{g(t)}\,\mathrm{d}t$.
Temos que sendo g uma função contínua então h é diferenciável pelo Teorema Fundamental do Cálculo e sendo f uma função polinomial, esta também é diferenciável e então vem:

$$f'(x)=h'(x)\Leftrightarrow x^2+4x^3=x^2\cdot\mathrm{e}^{g(x)}\Leftrightarrow 1+4x=e^{g(x)}$$

Vem portanto que $g(x)=\log(1+4x)$ e então tem-se que g é definida em $\{x\in\mathbb{R}:1+4x>0\}$, isto é, g é definida num subconjunto D dado por $D=\left\{x\in\mathbb{R}:x<-\dfrac{1}{4}\right\}$.

(b) Reparamos que se se considerar $F(x)=\displaystyle\int_0^{\arctan(x)}\tan(t)\,\mathrm{d}t$ que $F(0)=0$ e sendo $g(x)=\log(1+4x)$ vem também que $g(0)=0$ pelo que estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ pelo que se pode aplicar o Teorema de Cauchy uma vez que a função F é uma função contínua pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelo Teorema da Função Composta uma vez que a função arco-tangente é contínua assim como a função tangente e porque g é também uma função contínua pois trata-se de uma função logarítmica.
Vem então pelo Teorema de Cauchy que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\arctan x)'\tan(\arctan(x))}{\frac{4}{1+4x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{4}{1+4x}}=\frac{1\cdot 0}{4\cdot 1}=0$$

Pergunta 3

Considere a função F definida por

$$F(x)=\int_0^{\log x}x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-x$$

Verifique que F tem um mínimo em $x=1$.

Resolução

A função $f(x)=\displaystyle\int_0^{\log x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ é um integral indefinido de uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Repare-se que a função F resulta da multiplicação de uma função g também contínua e diferenciável tal que $g(x)=x$ pela função f e ainda subtraindo uma constante, portanto F é também contínua e a sua derivada é dada por:

$$F^{'}(x)=(x)'\int_0^{\log x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+(x)\left(\int_0^{\log x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)'-1=\int_0^{\log x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\frac{x\mathrm{e}^{\log^2(x)}}{x}-1=\int_0^{\log x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+e^{\log^2(x)}-1$$

Nota-se que $F'(1)=\displaystyle\int_0^{\log 1}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\log^2 1}-1=0+e^0-1=0+1-1=0$ e portanto $x=1$ é um ponto de estacionaridade.

Calculemos a segunda derivada para classificar este mesmo ponto: $F''(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\log^2 x}}{x}+\dfrac{2\log x}{x}\mathrm{e}^{\log^2 x}$

Temos que $F''(1)=\dfrac{\mathrm{e}^{\log^2 1}}{1}+\dfrac{2\log 1}{1}\mathrm{e}^{\log^2 1}=1>0$ logo tem-se que $x=1$ é um ponto mínimo de F.

Pergunta 4

Seja g uma função definida e diferenciável em $\mathbb{R}$ e seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\phi(x) = \int_{\sin x}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

Verifique que o Polinómio de Taylor de segunda grau no ponto $a = 0$ é o polinómio nulo.

Resolução

A função ϕ pode ser dada por $\phi(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{x} g(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} g(t)\mathrm{d}t - \int_{0}^{\sin x} g(t)\mathrm{d}t$. Repare-se que se $\xi(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} g(t)dt$ vem que a função ϕ é dada pela subtracção de dois integrais indefinidos de uma função diferenciável g sendo então diferenciável. Note-se que $\displaystyle\int_{0}^{\sin x} g(t)\mathrm{d}t = \xi(\sin x)$ logo pelo Teorema da Função Composta como a função seno é diferenciável então também o é $\xi(\sin x)$.

Estamos então nas condições de calcular a primeira derivada da função ϕ sendo esta então dada por:

$$\phi'(x) = g(x) - \cos x \cdot g(\sin x)$$

Ora temos que a função ϕ' é também diferenciável uma vez que se trata da subtracção de duas funções diferenciáveis uma vez que g é diferenciável por hipótese e $\cos x \cdot g(\sin x)$ é diferenciável pelo Teorema da Função Composta e por se tratar do produto de duas funções diferenciáveis.
Estamos então nas condições de calcular a segunda derivada da função ϕ sendo esta então dada por:

$$\phi''(x) = g'(x) - \sin x \cdot g(\sin x) - \cos^2 x \cdot g'(\sin x)$$

Pretendemos calcular o Polinómio de Taylor de segundo grau no ponto $a = 0$ sendo este então dado por:

$$p_2(0) = \psi(x) = \psi(0) + \psi'(0) \cdot x + \frac{\psi''(0)}{2!} \cdot x^2$$

Então devemos calcular $\psi(0)$, $\psi'(0)$ e ainda $\psi''(0)$ tal que temos então:

$$\psi(0) = \int_{0}^{\sin 0} g(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{0} g(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$\psi'(0) = g(0) - \cos 0 \cdot g(\sin 0) = g(0) - g(0) = 0$$

$$\psi''(0) = g'(0) - \sin 0 \cdot g(\sin 0) - \cos^2 0 \cdot g'(\sin 0) = g'(0) - g'(0) = 0$$

Portanto temos que que o Polinómio de Taylor de segunda ordem da função ψ em $a = 0$ é o polinómio nulo.

Problema 5

Considere uma função contínua $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seja ainda $\Omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\Omega(x) = \int_{0}^{\sin x} \delta(t \cos x)\mathrm{d}t$$

(a) Prove que $\Omega(x) = \dfrac{1}{g(x)} \displaystyle\int_{0}^{h(x)} \delta(y)\mathrm{d}y$ sendo g e h duas funções tais que $g(x) = \cos x$ e $h(x) = \dfrac{\sin 2x}{2}$.

(b) Considerando que $\delta(0) = 1$ e considerando δ diferenciável na origem, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\Omega(x)}{x}$.

Resolução

(a) Consideremos a mudança de variável trivial $y = t\cos x$ tal que vem $\mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}t$. Os extremos de integração devem também ser alterados pelo que se $t = \sin x$ então $y = \sin x\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$ vindo então que

$$\Omega(x) = \int_0^{\frac{\sin 2x}{2}} \delta(y)\frac{\mathrm{d}y}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}\int_0^{\frac{\sin 2x}{2}} \delta(y)\mathrm{d}y$$

vindo portanto que $g(x) = \cos x$ e $h(x) = \dfrac{\sin 2x}{2}$ como queríamos demonstrar.

(b) Considerando que $\delta(0) = 1$ e considerando que δ é diferenciável na origem e sendo Ω uma função integral indefinido de uma função contínua vem que esta é diferenciável pelo Teorema Fundamental do Cálculo pelo que é possível calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Omega(x)}{x}$. Repare-se que $\Omega(0) = \dfrac{1}{\cos 0}\displaystyle\int_0^{\frac{\sin 2(0)}{2}} \delta(y)\mathrm{d}y = 0$ e portanto estamos perante uma inderminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ vindo então que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Omega(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\Omega'(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{\cos^2 x}\int_0^{\frac{\sin 2x}{2}} \delta(y)\mathrm{d}y + \cos 2x\cdot\delta\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\right] = 0 + 1 = 1$$

Problema 6

Considere uma função contínua $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\gamma(x) = \int_0^{\sin x} \log(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\cos x} \log\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t$$

(a) Prove que $\gamma^{'}(x) = (\sin x + \cos x)\log(\sin x), \forall x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Considere a função ϕ tal que $\phi(x) = \dfrac{\gamma^{'}(x)}{\sin x + \cos x}$. Prove que $\displaystyle\int_0^{\pi} \phi(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\phi(x) + \log(\cot x)]\,\mathrm{d}x$ sem calcular o integral.

Resolução

(a) A função γ é uma função contínua e diferenciável pelo Teorema Fundamental do Cálculo pois trata-se da subtracção de dois integrais indefinidos de uma função contínua portanto é possível calcular a sua derivada. Vem então que:

$$\gamma'(x) = \cos x\log(\sin x) + \sin x\log(\frac{\pi}{2} - \cos x) = \cos x\log(\sin x) + \sin x\log(\sin x) = (\sin x + \cos x)\log(\sin x), \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Como queríamos demonstrar.

(b) A função é então dada por $\phi(x) = \log(\sin x)$ pelo que o termo $\phi(x) + \log(\cot x)$ é dado por

$$\phi(x) + \log(\cot x) = \log(\sin x) + \log(\cot x) = \log(\sin x\cdot\cot x) = \log(\cos x)$$

vindo então que se $\xi(x) = \log x$ vem que devemos demonstrar que

$$\int_0^{\pi} \xi\,(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi\,(\cos x)\mathrm{d}x$$

Considerando a mudança de variável $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ vem que se $x = \pi$ então $t = -\dfrac{\pi}{2}$ e se $x = 0$ então $t = \dfrac{\pi}{2}$ e ainda $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ pelo que temos ainda que

$$\int_0^{\pi} \xi\,(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \xi\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)(-\mathrm{d}t) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \xi\,(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \xi\,(\cos t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi\,(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

em que chegámos à conclusão pedida já que a função cosseno é uma função par (último passo).

Problema 7

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par e diferenciável. Considere a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = f(x^2) \int_0^{\frac{x^3}{3}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Prove que F é uma função ímpar.
(b) Justifique que F é diferenciável e calcule a sua derivada.
(c) Assumindo que $f(0) = f'(0) = 1$ calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F'(x)}{x^2 f(x^2)}$.

Resolução

(a) Uma função ímpar F verifica $F(-x) = -F(x)$. Considerando uma mudança de variável $u = -t$ vem que $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ e ainda se $t = -\dfrac{x^3}{3}$ então $u = \dfrac{x^3}{3}$ portanto vem que

$$F(-x) = f(x^2) \int_0^{-\frac{x^3}{3}} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x^2) \int_0^{\frac{x^3}{3}} f(-u)(-\mathrm{d}u) = -f(x^2) \int_0^{\frac{x^3}{3}} f(u)\,\mathrm{d}u = -F(x)$$

em que $f(-u) = f(u)$ pois f é uma função par.

(b) F é diferenciável pois trata-se do produto de duas funções diferenciáveis, uma pelo Teorema da Função Composta e outra pelo Teorema Fundamental do Cálculo por se tratar do integral indefinido de uma função diferenciável. Temos portanto reunidas todas as condições para o calculo da primeira derivada de F vindo então que

$$F'(x) = 2xf'(x^2) \int_0^{\frac{x^3}{3}} f(t)\,\mathrm{d}t + x^2 f(x^2) f\left(\frac{x^3}{3}\right) = xf(x^2)\left(2\int_0^{\frac{x^3}{3}} f(t)\mathrm{d}t + xf\left(\frac{x^3}{3}\right)\right)$$

(c) Temos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F'(x)}{x^2 f(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\int_0^{\frac{x^3}{3}} f(t)\mathrm{d}t + xf\left(\frac{x^3}{3}\right)}{x}$ Repare-se que o numerador $2\displaystyle\int_0^{\frac{x^3}{3}} f(t)\mathrm{d}t + xf\left(\frac{x^3}{3}\right)$ é uma função diferenciável pois é a soma de duas funções diferenciáveis (integral indefinido de uma função contínua e o produto de duas funções contínuas).
Visto que estamos perante uma indeterminação $\dfrac{0}{0}$, aplicando a Regra de Cauchy para o cálculo de limites temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\int_0^{\frac{x^3}{3}} f(t)\mathrm{d}t + xf\left(\frac{x^3}{3}\right)}{x} \overset{R.C}{=} \lim_{x\to 0} \left[2x^2 f\left(\frac{x^3}{3}\right) + f\left(\frac{x^3}{3}\right) + xf'\left(\frac{x^3}{3}\right)\right] = 0\cdot 1 + 0 + 0\cdot 1 = 0$$

Problema 8

Seja $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida pela identidade

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{t^2+1}{t}\right)}\mathrm{d}t$$

(a) Prove que $F(1/x) = -F(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.
(b) Justifique que F é diferenciável e calcule $F^{'}(1/x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.
(c) Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{F'(x)}{\sqrt[x]{e}}$

Resolução

(a) Temos que $F(1/x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{t^2+1}{t}\right)}\mathrm{d}t$ pelo que procedendo à mudança de variável $t = \dfrac{1}{u}$ vem que $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$ e portanto se $t = \dfrac{1}{x}$ então $u = x$. Temos ainda que $\dfrac{t^2+1}{t} = \dfrac{\frac{1}{u^2}+1}{\frac{1}{u}} = \dfrac{u^2+1}{u}$ e $\dfrac{1}{t} = u$ pelo que vem por fim

$$F(1/x) = \int_0^x \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{u^2+1}{u}\right)}(-\mathrm{d}u) = -\int_0^x \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{u^2+1}{u}\right)}\mathrm{d}u = -F(x)$$

Demonstrando assim o que se pretendia.

(b) A função F trata-se do integral indefinido de uma função diferenciável em $\mathbb{R}^+$ (quociente de duas funções contínuas) pelo que é também diferenciável e pelo Teorema Fundamental do Cálculo vem que a derivada de $F'(1/x) = -F'(x)$ é dada por

$$-F'(x) = -\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

(c) Pretende-se calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{\sqrt[x]{e}}$. A partir da alínea anterior conclui-se que $F'(x) = \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ e sendo $\sqrt[x]{e} = e^{\frac{1}{x}}$ temos que

$$\frac{F'(x)}{\sqrt[x]{e}} = \frac{e^{\frac{x^2+1}{x}} \cdot e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^x}{x}$$

O limite é então trivial de calcular uma vez que estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ e sendo tanto o numerador como o denominador funções contínuas tem-se:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{\sqrt[x]{e}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Problema 9

Considere a função $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e uma constante real c, tal que

$$\psi(x) = c\left[x\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{x}} \frac{\sin t^2}{2t}\mathrm{d}t + \pi x\right]$$

Calcule o valor da constante c tal que $\psi'(\pi) = \pi$.

Resolução

Comecemos por verificar que a função ψ é uma função diferenciável pois trata-se da adição de duas funções diferenciáveis (integral indefinido de uma função contínua multiplicada por uma função também contínua (polinómio) e um polinómio) pelo que estamos em condições de calcular a sua derivada vindo então pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\psi'(x) = c\left[\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{x}} \frac{\sin t^2}{2t}\mathrm{d}t + x\cdot\frac{\sin x}{2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}} + \pi\right] = c\left[\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{x}} \frac{\sin t^2}{2t}\mathrm{d}t + \frac{\sin x}{4} + \pi\right]$$

Pelo que

$$\psi'(\pi) = c\left[\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \frac{\sin t^2}{2t}\mathrm{d}t + \frac{\sin\pi}{4} + \pi\right] = c\pi$$

Portanto se $\psi'(\pi) = \pi$ então $c = 1$.

Problema 10

Prove que sendo f uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^+$ então

$$\log(1+f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{e^t}{1+f\left(\sqrt{t}\right)} \mathrm{d}t$$

só se verifica caso f pertença à família de funções definidas por

$$f(x) = e^{x^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Resolução

Consideremos duas funções h e g tais que $h(x) = \log(1+f(x))$ e $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{e^t}{1+f\left(\sqrt{t}\right)} \mathrm{d}t$. Temos que h é contínua e diferenciável uma vez que é a função composta de uma função contínua e g é também diferenciável pois trata-se do integral indefinido de uma função também diferenciável (quociente de duas funções diferenciáveis).

Reparemos que se $h(x) = g(x)$ então $h'(x) = g'(x)$ pelo que aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo vem

$$\frac{f'(x)}{1+f(x)} = 2x \cdot \frac{e^{x^2}}{1+f(x)}$$

portanto temos que

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

pelo que por primitivação imediata vem que (repare-se que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x^2} = 2xe^{x^2}$)

$$f(x) = e^{x^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Problema 11

Seja h uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, considere a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\arctan x} h(t)\,\mathrm{d}t, \; x \in \mathbb{R}_0^+ \\ \displaystyle\int_{-1}^{\log(-x+1)} h(t)\,\mathrm{d}t, \; x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Tenha ainda em conta que, Φ é contínua em $x = 0$, h é injectiva, $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ e que $h'(1) < 0$.

(a) Defina a função Φ'.
(b) Mostre que Φ tem um máximo em $\mathbb{R}_0^+$ e indique a expressão que permite calcular o seu valor.

Resolução

(a) Tendo em conta que Φ é uma função definida por ramos e estes mesmos são funções integral indefinido de uma função contínua, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, Φ tem derivada contínua portanto analisemos primeiramente a função em $x \in \mathbb{R}_0^+$, tal que temos:

$$\Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} h\left(\arctan x\right), \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$$

Tem-se ainda para $x \in \mathbb{R}^-$ que:

$$\Phi'(x) = \frac{h\left(\log(-x+1)\right)}{x-1}, \forall\, x \in \mathbb{R}^-$$

A função derivada de Φ é então $\Phi' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}\, h\left(\arctan x\right),\; x \in \mathbb{R}_0^+ \\ \\ \dfrac{h\left(\log(-x+1)\right)}{x-1},\; x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

(b) Comecemos por notar que os pontos de estacionaridade de Φ no intervalo a considerar são calculados tendo em conta a condição $h\left(\arctan x\right) = 0$. Sendo h injectiva, h tem um só zero e de acordo com as condições dadas h tem zero para $\arctan x = \dfrac{\pi}{4}$, logo tem-se $x = 1$.

Temos de mostrar então que $\Phi''(1) < 0$ e para tal definamos a segunda derivada de Φ no intervalo considerado:

$$\Phi''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\, h(\arctan x) + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 h'(\arctan x)$$

Ora vem então que sendo $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, considerando que $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^2 > 0$ para qualquer ponto do intervalo considerado e ainda $h'\left[\arctan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = h'(1) < 0$ temos então que $\Phi''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$ e portanto concluímos, como pretendido, que Φ tem um máximo em $\mathbb{R}_0^+$ mais especificamente em $x = \dfrac{\pi}{4}$.

O valor do máximo é então:

$$y_{max} = \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$$

Problema 12

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que se verifica

$$\begin{cases} h(x) > 0,\; x \in \mathbb{R}_0^+ \\ h(x) < 0,\; x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

e considere $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_0^{\log x} h(t)\,\mathrm{d}t$$

Mostre que se a e b são duas constantes reais tais que $a > 1$ e $0 < b < 1$, então

$$\exists\, c \in\,]a, b[\, : f'(c) = 0$$

Resolução

Repare-se que f é uma função diferenciável pois trata-se do integral indefinido de uma função diferenciável h pelo que a sua derivada pode ser calculada vindo então a partir do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$f'(x) = \frac{h(\log x)}{x}$$

pelo que considerando dois pontos em que $x = a$ e outro em que $x = b$ vem que

$$f(a) = \frac{h(\log a)}{a} > 0$$

$$f(b) = \frac{h(\log b)}{b} < 0$$

já que sendo $a > 1$, então $\log a > 0$, portanto $h(\log a) > 0$ e ainda sendo $0 < b < 1$ vem que $\log b < 0$, portanto $h(\log b) < 0$. (Repare-se que tanto $\dfrac{1}{a}$ como $\dfrac{1}{b}$ são quantias reais positivas)

Temos portanto do Teorema do Valor Intermédio, como f é uma função contínua em $[a, b]$, que $f(a) \cdot f(b) < 0$ pelo que é evidente a existência de um zero no intervalo $]a, b[$ provando então que

$$\exists\, c \in\,]a, b[\, : f'(c) = 0$$

Problema 13

Seja g uma função definida e contínua em $\mathbb{R}^+$ e considere a função

$$\phi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{2(x-t)} \left[1 + (g(t))^2\right] \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

(a) Considere que $g(t) = \sqrt{t}$ e mostre que $\phi'(0) = 1$.
(b) Prove que para qualquer função g que reúna as condições acima referidas verifica

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$$

[Sugestão: Comece por provar que $\phi(x) \geq \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x} - 1), \forall x \in \mathbb{R}^+$]

Resolução

(a) Sendo $g(t) = \sqrt{t}$ vem que

$$\phi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{2(x-t)} (1+t)\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{2x} \int_0^x \mathrm{e}^{-2t} (1+t)\, \mathrm{d}t$$

Temos que ϕ é uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^+$ pois trata-se do produto de uma função exponencial por uma função integral indefinido de uma função diferenciável pelo que o Teorema Fundamental do Cálculo permite escrever:

$$\phi'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} \int_0^x \mathrm{e}^{-2t} (1+t)\, \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x}(1+x) = \mathrm{e}^{2x} \int_0^x \mathrm{e}^{-2t} (1+t)\, \mathrm{d}t + 1 + x$$

Portanto vem que

$$\psi'(0) = \mathrm{e}^{2\cdot 0} \int_0^0 \mathrm{e}^{-2t} (1+t)\, \mathrm{d}t + 1 + 0 = 1$$

como pretendíamos mostrar.

(b) Temos que

$$\phi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{2(x-t)} \left[1 + (g(t))^2\right] \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Dado que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad [1 + (g(t))^2] \geq 1$$

vem

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{-2t}[1 + (g(t))^2] \geq \mathrm{e}^{-2t}$$

e portanto,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad \int_0^x \mathrm{e}^{-2t}[1 + (g(t))^2]\, \mathrm{d}t \geq \int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x} - 1\right)$$

E então

$$\mathrm{e}^{2x} \int_0^x \mathrm{e}^{-2t}[1 + (g(t))^2]\, \mathrm{d}t = \phi(x) \geq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)$$

e uma vez que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right) = +\infty$$

concluímos como pretendíamos

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$$

□

Bibliografia

[1] A.Bastos, A.Bravo *Texto de apoio às aulas*, Lisboa, 2010.

[2] *Páginas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I* de vários professores:

- Professor António Bravo, Instituto Superior Técnico
- Professora Amélia Bastos, Instituto Superior Técnico
- Professora Luísa Ribeiro, Instituto Superior Técnico
- Professor Miguel Abreu, Instituto Superior Técnico
- Professora Catarina Carvalho, Instituto Superior Técnico
- Professor João Santos, Instituto Superior Técnico
- Professor Pedro Henriques, Instituto Superior Técnico
- Professor Luís Pessoa, Instituto Superior Técnico