Externato de São Miguel de Refojos

Teste único de Matemática A

Versão

Duração do teste: 90 min | 06.11.2015

10º ano de escolaridade

Nome:______________________________ N.º_____ Turma:_____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Sejam p, q e r três proposições.
   Quais são os valores lógicos de p, q e r que tornam verdadeira a proposição:

$$\sim \left[(p \Rightarrow r) \vee \sim (q \wedge \sim r)\right]$$

(A) p e r são verdadeiras e q é falsa

(B) p e q são verdadeiras e r é falsa

(C) p, q e r são todas verdadeiras

(D) q e r são verdadeiras e p é falsa

2. Considere as proposições:
   p: *O João estuda todos os dias.*
   q: *O João teve positiva no teste de matemática.*
   r: *A mãe do João ofereceu-lhe uma prenda.*
   Qual das proposições seguintes traduz para a linguagem da lógica proposicional a afirmação:

Como o João estuda todos os dias e teve positiva no teste de matemática, a mãe dele ofereceu-lhe uma prenda.

(A) $p \wedge q \Rightarrow r$ **(B)** $r \Rightarrow p \wedge q$ **(C)** $p \wedge q \Leftrightarrow r$ **(D)** $p \wedge q \Rightarrow \sim r$

3. Considere a proposição:

$$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 2n$$

Qual das seguintes afirmações traduz para linguagem natural a negação da proposição dada?

(A) Existe pelo menos um número natural cujo quadrado é igual ao seu dobro.

(B) Qualquer que seja o número natural, o seu quadrado é diferente do seu dobro.

(C) Qualquer que seja o número natural, o seu quadrado é igual ao seu dobro.

(D) Existe pelo menos um número natural cujo quadrado é diferente do seu dobro.

4. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 = 5x + 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x > -4 \wedge x \leq 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 > 0 \vee 5 - x \leq 0\}$.

Qual dos seguintes conjuntos é igual a $\{3\}$?

(A) $A \cap B \cap \overline{C}$

(B) $(A \cap B) \setminus C$

(C) $(A \cup B) \setminus C$

(D) $(A \cup B) \setminus \overline{C}$

5. Para dois números reais positivos a e b, considere a expressão:

$$\frac{\sqrt{a^3 b} \times \sqrt[3]{a^2 b}}{ab^2 \times \sqrt[6]{\frac{a}{b}}}$$

Uma expressão equivalente à expressão dada é:

(A) $\frac{a}{b}$ **(B)** $\frac{b}{a}$ **(C)** ab **(D)** $a\sqrt{b}$

Grupo II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor **exato**.

1. Considere as proposições:

a: O André é engenheiro.

b: O André é arquiteto.

c: O André tem uma licenciatura.

1.1. Sabe-se que a proposição $(c \Rightarrow \sim b) \wedge (\sim a \Rightarrow b) \wedge c$ é verdadeira.
Determine, justificando devidamente, o valor lógico das proposições a, b e c.
O que pode concluir acerca das habilitações do André?

1.2. Considere a expressão proposicional:

$$a \vee b \Rightarrow c$$

Traduza o seu significado em linguagem corrente, de acordo com o contexto.

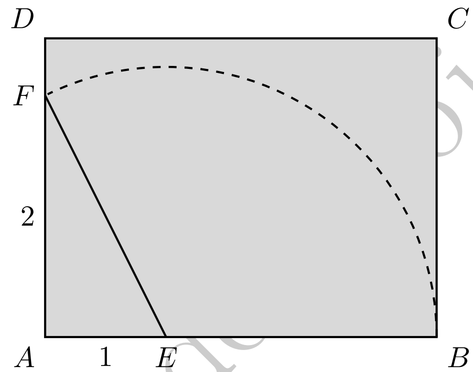
2. Sejam p e q duas quaisquer proposições. Prove, sem utilizar tabelas de verdade, que a proposição $\left[(p \Rightarrow q) \wedge p\right] \Rightarrow q$ é uma tautologia.

3. Mostre, sem utilizar a calculadora, que $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}$ é um número natural.

4. Considere o retângulo $[ABCD]$ representado na figura.

   Tal como a figura sugere, sabe-se que:

   - $\overline{AE} = 1$ cm;
   - $\overline{AF} = 2$ cm;
   - FB é um arco de circunferência centrado em E;
   - a área do retângulo $[ABCD]$ é de 8 cm^2.



   Mostre, sem utilizar a calculadora, que $\overline{BC} = \left(2\sqrt{5}-2\right)$ cm.

5. Considere, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

   $a(x) : x^2 + 3x = 0$

   $b(x) : \frac{x-1}{2} - 4x > 3$

   $c(x) : \sqrt{x^2} = 3$

   5.1. Classifique como universal, como possível não universal ou como impossível a condição:

   $$a(x) \wedge \sim b(x) \wedge x \in \mathbb{R}$$

   Justifique devidamente a sua resposta.

   5.2. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte condição:

   $$\exists x \in \mathbb{R}^- : a(x) \wedge c(x)$$

   5.3. Considere ainda os conjuntos A e B definidos por $A = \{x \in \mathbb{R} :\sim a(x) \vee \sim b(x)\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x < 1\}$.
   Defina, em extensão, o conjunto $A \cap B$.

6. Demonstre, por contrarrecíproco, que se um número natural n não é divisível por 3, então não é divisível por 12.

FIM

Questão	1.	2.	3.	4.	5.	1.1	1.2	2	3	4	5.1	5.2	5.3	6	**Total**
Cotação	10	10	10	10	10	20	10	20	20	20	15	10	15	20	**200**