Matemática A - 11º Ano

Resolução do 2º Teste de Avaliação - 2012/2013

Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal - AEAS

Nuno Miguel Guerreiro

pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

Grupo I

1. Tendo em conta que $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$, vem que:

$$\sin\alpha=\frac{1}{7}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{7}$$

Resposta Correcta: (D)

2. A área do trapézio $[OADC]$ é dada por:

$$A_{[OADC]}=\frac{\overline{AD}+\overline{OC}}{2}\times\overline{AB}$$

Ora sabe-se que $\overline{AO}=1$ pois é o raio do círculo trigonométrico, logo, $\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{BC}=\sin\alpha$ e também que $\overline{OB}=\cos\alpha$, vindo então $\overline{OC}=\cos\alpha+\sin\alpha$.
Desta forma vem:

$$A_{[OADC]}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha+\sin\alpha}{2}\times\sin\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}+\sin^2\alpha$$

Resposta Correcta: (C)

3. A recta tangente à circunferência de centro na origem no ponto P, ponto este contido na circunferência é perpendicular ao vector $\overrightarrow{OP}$. Desta forma vem $\overrightarrow{OP}=P-O=P=(-2,4)$.
Sendo a recta tangente perpendicular a $\overrightarrow{OP}$ vem que $m'=-\frac{1}{m}$ e como $m_{\overrightarrow{OP}}=\frac{4}{-2}=-2$ vem:

$$m'=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$$

Como a recta tangente contém o ponto P repara-se facilmente que a recta tangente tem equação $y=\frac{1}{2}x+5$.

Resposta Correcta: (C)

4. Uma recta é paralela a um plano se e só se o vector director da recta for perpendicular e não colinear com o vector normal ao plano.
Neste caso tem-se $\overrightarrow{n}=(1,1,1)$ pelo que o vector director da recta deve ser $\overrightarrow{u}=(1,2,-3)$, pois tem-se:

$$(1,1,1)\cdot(1,2,-3)=1+2-3=0$$

Os vectores são então perpendiculares pelo que a resposta correcta está encontrada.

Resposta Correcta: (C)

5. O ponto A deve ser um ponto pertencente tanto ao plano α como à recta r.
O ponto $(2,0,1)$ é tal que $2\times2+8\times0+1=5$ e portanto pertencente a α e ainda $\frac{2}{2}=\frac{0+8}{8}=1$, portanto também pertencente à recta r.
Conclui-se portanto que A é o ponto de coordenadas $(2,0,1)$.

Resposta Correcta: (A)

Grupo II

1. Sendo β um ângulo cuja amplitude, em radianos, pertence ao intervalo $\left]\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right[$, sabe-se que β pertence ao 2º Quadrante e, portanto, $\cos\beta < 0$ e $\tan\beta < 0$.
   Como $\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ vem da Fórmula Fundamental da Trigonometria ($\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$):
   $$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\beta = \underbrace{\pm\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}}_{\beta\in 2^{\text{o}}\ \text{Quadrante}}$$
   Conclui-se portanto:
   $$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$
   ■

2. As soluções da equação $3\tan x = -\sqrt{3}$ são as soluções da equação
   $$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
   Como $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ para $x = \frac{\pi}{6}$, vem que, correspondendo a ângulos do segundo e quarto quadrante aqueles que são procurados uma vez que nestes a tangente é negativa vem:
   $$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
   $$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
   Conclui-se então que todas as soluções da equação se obtêm variando os valores de k nas soluções acima apresentadas.

3. Considerando os pontos $A(1,3)$ e $B(3,-3)$.

   3.1. A recta AB tem como vector director o vector $\overrightarrow{AB}$ vindo então $\overrightarrow{AB} = B - A = (3,-3) - (1,3) = (2,-6)$ correspondendo a um declive m de valor $m = \frac{-6}{2} = -3$.
   A recta t é perpendicular à recta AB logo tem declive m' dado por $m' = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$.
   O ponto de intersecção destas rectas está sobre o eixo yy logo devemos definir a equação reduzida da recta AB, vindo $y = -3x + b_{AB}$ e pertencendo o ponto A a esta mesma vem:
   $$3 = -3 \times 1 + b_{AB} \Leftrightarrow b_{AB} = 6$$
   Conclui-se então que a intersecção com o eixo dos yy é o ponto $(0,6)$.
   Como este ponto pertence à recta t de equação $y = \frac{1}{3}x + b$ vem:
   $$6 = \frac{1}{3} \times 0 + b \Leftrightarrow b = 6$$
   Conclui-se então que a equação reduzida da recta t é:
   $$y = \frac{1}{3}x + 6$$

   3.2. Pela definição de produto interno entre dois vectores tem-se que
   $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\alpha$$
   em que α é o ângulo que o vector $\overrightarrow{v}$ faz com o vector $\overrightarrow{u}$.
   O vector $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(2,-6)$ e o vector $\overrightarrow{u}$ tem coordenadas $(1,3)$, vindo então:
   $$(2,-6)\cdot(1,3) = \sqrt{2^2 + (-6)^2} \times \sqrt{1^2 + 3^2} \times \cos\alpha \Leftrightarrow -16 = 20\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$
   Vem então que $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) = 143^o\, 7'$.

4. Considere-se a pirâmide quandragular $[ABCDV]$.

4.1. As coordenadas de um ponto V', pertencente à superfície esférica de centro em V e tangente ao plano ABC podem ser determinadas começando por definir a equação da superfície esférica.
A equação geral de uma superfície esférica de centro em (a, b, c) e raio r é

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Tendo centro em V vem que a equação da superfície esférica toma a forma:

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = r^2$$

Sendo tangente ao plano ABC, o raio da superfície esférica é perpendicular ao plano ABC.
Este plano tem equação $x = 0$ como se pode reparar facilmente pelo que o vector normal ao plano é o vector $(1, 0, 0)$.
A recta que define o raio da superfície esférica tem como vector director o vector $(1, 0, 0)$ e passando em $V(5, 3, 1)$ vem que sendo P o ponto de tangência, a recta VP que define o raio da superfície esférica pode ser dada por $(5, 3, 1) + k(1, 0, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.
Os pontos desta recta são da forma $(5k, 3, 1)$ e como o ponto de tangência pertence ao plano ABC vem: $5k = 0$ e portanto $k = 0$ e o ponto de tangência P é o ponto $P(0, 3, 1)$ pelo que o raio da superfície esférica é dado por:

$$\left\|\overrightarrow{VP}\right\| = \|(5, 3, 1) - (0, 3, 1)\| = \sqrt{5^2} = 5$$

A equação da superfície esférica é então

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$$

Portanto, qualquer ponto que respeite esta equação pode ser o ponto V' vindo, por exemplo, $V'(10, 3, 1)$.

4.2. A altura da pirâmide tem como valor a norma do vector $\overrightarrow{MV}$ em que M é o ponto médio do segmento $[BC]$. Desta forma tem-se $M\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}, \frac{z_B+z_C}{2}\right)$, logo sendo $B(0, 4, 0)$ e $C(0, 2, 2)$ vem $M(0, 3, 1)$.
O vector director da recta é então $\overrightarrow{MV}$ vindo $\overrightarrow{MV} = V - M = (5, 3, 1) - (0, 3, 1) = (5, 0, 0)$ e a recta que contém a altura da pirâmide pode ser dada por:

$$\frac{x}{5} \wedge y = 1 \wedge z = 1$$

4.3. O plano perpendicular à recta CV tem como vector normal o vector director $\overrightarrow{CV}$, vindo então, $\overrightarrow{CV} = V - C = (5, 3, 1) - (0, 2, 2) = (5, 1, -1)$.
A equação geral do plano é então:

$$5x + y - z + d = 0$$

Como o plano contém o ponto $A(0, 2, 0)$ vem:

$$5 \times 0 + 2 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Desta forma conclui-se que a equação do plano perpendicular à recta CV que contém o ponto A é:

$$5x + y - z - 2 = 0$$

4.4. O plano CDV é tal que o seu vector normal $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{CV}$ e $\overrightarrow{DV}$.
Ora então tem-se $\overrightarrow{CV} = V - C = (5, 1, -1)$ como calculado na alínea anterior e $\overrightarrow{DV} = V - D = (5, 3, 1) - (0, 4, 2) = (5, -1, -1)$, vindo então:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{CV} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{DV} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (5, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (5, -1 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b - c = 0 \\ 5a - b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - b = c \\ b = 0 \end{cases}$$

Conclui-se então que $c = 5a$ e $b = 0$, pelo que para $a = 1$ vem $\overrightarrow{n} = (1, 0, 5)$ e a equação do plano CDV é:

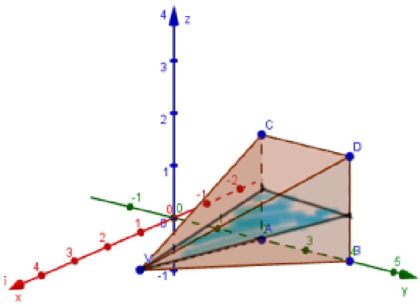
$$x + 5z + d = 0$$

Como o plano contém o ponto $D(0,4,2)$ vem:

$$0 + 5 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$$

E a equação do plano CDV é $x + 5z = 10$, como se queria demonstrar.
A intersecção com o eixo das cotas é o ponto $(0,0,z)$ vindo $0 + 5z = 10 \Leftrightarrow z = 2$ e o ponto é o ponto $(0,0,2)$.

4.5. A secção produzida na pirâmide pelo plano $z = 1$ é a secção presente na figura abaixo.



A área é então a área do triângulo representado a sombreado cuja base tem valor 2 pois é a distância do ponto C ao ponto D e tem como altura, a altura da pirâmide que é a norma do vector $\overrightarrow{MV}$ já definido na pergunta 4.2, vindo $\overrightarrow{MV} = (5,0,0)$. Conclui-se facilmente que a altura da pirâmide vale então 5 unidades de comprimento.

Desta forma vem:

$$A_{\text{secção}} = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 5}{2} = 5$$

FIM