Matemática A - 11º Ano

Resolução do 1º Teste de Avaliação - 2012/2013

Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal - AEAS

Nuno Miguel Guerreiro

pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

Grupo I

1. Sabe-se que $\overline{BC} = 2\overline{DC}$, e sendo $\overline{DC}$ e $\overline{BC}$ dois catetos de um triângulo rectângulo, vem pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{DB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 \Leftrightarrow \overline{DB}^2 = (2\overline{DC})^2 + \overline{DC}^2 \Leftrightarrow \overline{DB} = \sqrt{5}\,\overline{DC}$$

Ora então tem-se facilmente que:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DC}}{\sqrt{5}\,\overline{DC}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Resposta Correcta: (A)

2. Um relógio completa uma volta quando percorre um ângulo de amplitude 2π radianos.
Existindo 12 divisões, isto é, uma a cada 5 minutos, a amplitude do ângulo que é percorrido de 5 em 5 minutos é $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.
Como a convenção instaura que um ângulo é positivo caso seja percorrido no sentido anti-horário e negativo caso seja percorrido no sentido horário e tendo em conta que entre as 10h25min e as 10h50min foram percorridos 25 minutos (5 divisões) vem:

$$\alpha = -5 \times \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

Resposta Correcta: (B)

3. Considerando as reduções ao primeiro quadrante:

- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan(x)}$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

Pode-se então concluir que a afirmação seguinte é verdadeira: $-\tan(\pi - x) = \tan(x + \pi)$.

Resposta Correcta: (D)

4. A equação $\sin(x) = -\frac{6}{7}$ tem um par de soluções sempre que são percorridos o 3º e 4º quadrante.
Repare-se que em $]-\pi, 2\pi[$, são percorridos duas vezes estes quadrantes, uma primeira vez em $]-\pi, 0[$ e outra em $]\pi, 2\pi[$.
Conclui-se então que existem quatro soluções da equação $\sin(x) = -\frac{6}{7}$ em $]-\pi, 2\pi[$.

Resposta Correcta: (D)

5. Considerando um triângulo rectângulo cujos lados medem, 3, 4 e 5 e em que $[PQ]$ é o cateto maior e $[PR]$ a hipotenusa, sabe-se que o ângulo que $\overrightarrow{PQ}$ faz com $\overrightarrow{PR}$ é um ângulo α tal que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.
Desta forma vem:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \times \left\|\overrightarrow{PR}\right\| \times \cos\alpha = 4 \times 5 \times \frac{4}{5} = 4 \times 4$$

Resposta Correcta: (C)

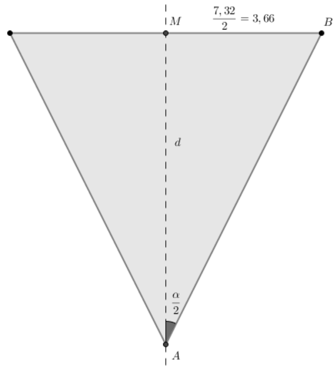
Grupo II

1. Considere-se um jogador que está sobre a recta perpendicular à linha de fundo que contém o ponto médio da baliza. Este jogador está a uma distância d da linha de fundo e vê a baliza segundo um ângulo de 20^o.

   Sabe-se que a baliza tem um comprimento de $7,32$m, pelo que considerando um ponto M como ponto médio da baliza vem:

   $$\tan(10) = \frac{\frac{7{,}32}{2}}{d} \Leftrightarrow d = \frac{3,66}{\tan(10)} = 20,8m$$

   Conclui-se, então, que o jogador está a uma distância de 20,8 metros da linha de fundo.

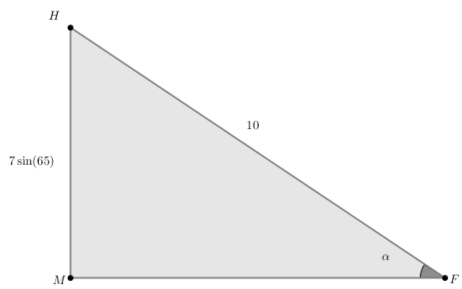


2. Seja M o ponto de intersecção entre a recta perpendicular à recta horizontal que contém H e o segmento $[GF]$. Desta forma, e, tendo em conta que $H\hat{G}F = 65^o$, é possível escrever:

   $$\sin(65) = \frac{\overline{HM}}{\overline{HG}} \Leftrightarrow \overline{HM} = 7\sin(65)$$

   Tendo em conta o triângulo $[HMF]$ na figura ao lado, reparamos que têm-se as dimensões do cateto oposto $[HM]$ ao ângulo GFH, doravante designado α, e da hipotenusa $[HF]$, sendo possível escrever:

   $$\sin\alpha = \frac{\overline{HM}}{\overline{HF}} = \frac{7\sin(65)}{10} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{7\sin(65)}{10}\right) = 39^o\, 22'$$



3. Sabe-se que $\tan\beta = 3$ e que $\cos\beta < 0$, logo, podemos concluir que o ângulo β pertence ao terceiro quadrante e, portanto, $\sin\beta < 0$.
   Tem-se da fórmula secundária da trigonometria:

   $$1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow 1 + 3^2 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \cos\beta = \underbrace{\pm\sqrt{\frac{1}{10}} = -\sqrt{\frac{1}{10}}}_{\beta \in 3^{\text{o}}\ \text{Quadrante}}$$

   Desta forma, vem pela Fórmula Fundamental da Trigonometria:

   $$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2\beta = 1 - \frac{1}{10} \Leftrightarrow \sin\beta = \underbrace{\pm\sqrt{\frac{9}{10}} = -\sqrt{\frac{9}{10}}}_{\beta \in 3^{\text{o}}\ \text{Quadrante}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

   Conclui-se então que $\sin\beta = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

4. Considere-se um circulo trigonométrico e o triângulo $[PQT]$.

4.1. O triângulo $[PQT]$ tem como altura h a distância horizontal entre o ponto Q e o ponto P e de base, o comprimento do segmento $[PT]$ tal que vem:

$$\cos\alpha = \frac{1-h}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \cos\alpha = 1-h \Leftrightarrow h = 1-\cos\alpha$$

De forma a determinar o comprimento do segmento $[PT]$ pode-se escrever:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{PT}}{\overline{PO}} \Leftrightarrow \overline{PT} = 1\times\tan\alpha = \tan\alpha$$

Conclui-se então que a área do triângulo $[PQT]$ é dada por:

$$A_{[PQT]} = \frac{b\times h}{2} = \frac{(1-\cos\alpha)\times\tan\alpha}{2} = \frac{\tan\alpha-\tan\alpha\times\cos\alpha}{2} = \frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{2}$$

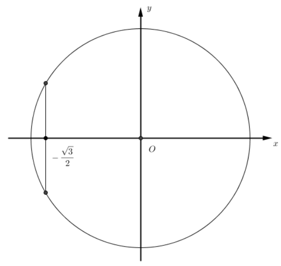
Uma vez que $\tan\alpha\times\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\cos\alpha = \sin\alpha$.

4.2. Para $\alpha = \frac{\pi}{4}$, a área do triângulo $[PQT]$ é dada por:

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Desta forma conclui-se que o valor exacto da área do triângulo $[PQT]$ é $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

5. O conjunto solução da equação $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ pode ser determinado da seguinte forma:
Ora sabe-se que $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $x = \frac{\pi}{6}$. Estando à procura dos pontos em que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ as soluções estão no 2º e 3º Quadrante que dizem a respeito a ângulos $\pi - x$ e $\pi + x$ respectivamente vindo:



$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

Como se pretendem as soluções da equação em $[0, 2\pi]$, estas são determinadas para $k=0$ em qual um dos membros da solução vindo então C.S: $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

6. Um triângulo equilátero de lado a tem os três ângulos internos θ de igual amplitude vindo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

No triângulo ao lado está representado o triângulo em questão.
Sendo $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \frac{a}{2}$ pois M é o ponto médio do lado $[AB]$ e ainda $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = a$ pois representa o comprimento de um lado do triângulo equilátero, tem-se que:

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BM}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\theta = \frac{a}{2}\times a\times\cos\frac{\pi}{3} = a\times\frac{a}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}$$