Exame Nacional de Matemática A
1ª Fase – 2017

Proposta de Resolução
Versão 1

Nuno Miguel Guerreiro

I

Chave da Escolha Múltipla

ABDABCDC

1. Pretendem-se formar números naturais de quatro algarismos com os algarismos disponíveis de 1 a 9.

Sabendo que estes números naturais devem ser múltiplos de 5, então o seu último algarismo deverá ser um 5, não havendo qualquer restrição aos outros 3 anteriores: $9 \times 9 \times 9 \times 1 = 729$

Resposta Correcta: (A)

2. Sejam os acontecimentos:

A: "O aluno da turma é rapaz"

B: "O aluno da turma tem olhos verdes"

Tem-se que $P(B|A) = \frac{1}{4}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$, logo:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B|A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$$

Como existem 20 alunos na turma, existem $\frac{2}{5} \times 20 = 8$ rapazes na turma.

Resposta Correcta: (B)

3. Por observação do gráfico de f tem-se que em -1 e em -2, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo, e em 1 e 2 o gráfico de f tem concavidade voltada para cima: $f''(-2) < 0$, $f''(-1) < 0$, $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$.

Desta forma conclui-se que:

$f''(-1) \times f''(-2) > 0$

$f''(1) \times f''(2) > 0$

$f''(1) + f''(2) > 0$

$f''(-2) + f''(-1) < 0.$

Resposta Correcta: (D)

4. Tem-se que $y = -x$ é assíntota do gráfico de f e do gráfico de g, logo $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$.

Sabe-se ainda que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, logo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \times g(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

Resposta Correcta: (A)

5. Atentando às opções disponíveis tem-se que: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ e $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$.

Sabe-se ainda que: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

Logo tem-se:

- Caso A seja o conjunto $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, o contradomínio seria $]-1,1[$
- Caso A seja o conjunto $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$, o contradomínio seria $]-1,+\infty[$
- Caso A seja o conjunto $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$, o contradomínio seria $]-\infty,-1[$
- Caso A seja o conjunto $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$, o contradomínio seria $]1,+\infty[$

Resposta Correcta: (B)

6. A inclinação da reta r é α, logo, o declive de r é dado por $\tan\alpha$.

Sabendo que $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, tem-se que:

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}} - 1 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 4 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm 2$$

Desta forma tem-se que $\tan\alpha = -2$, uma vez que o ângulo é obtuso (repare-se que $\cos\alpha < 0$).

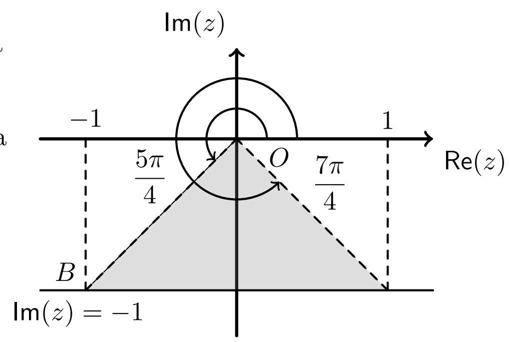
Conclui-se que a equação reduzida da reta r pode ser $y = -2x$.

Resposta Correcta: (C)

7. A condição $\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge \mathrm{Im}(z) \geq -1$ está representada na figura ao lado.

Considere o ponto B representado na figura. Uma vez que B se situa na reta $\mathrm{Im}(z) = -1$, e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares $\left(\arg(z) = \frac{5\pi}{4}\right)$, B também se situa na reta $\mathrm{Re}(z) = -1$

Como o triângulo é isósceles, conclui-se que a área do mesmo é dada por: $A = \frac{2 \times 1}{2} = 1$.



Resposta Correcta: (D)

8. A sucessão (u_n) é uma sucessão limitada, uma vez que os seus termos pertencem ao conjunto $A = [-1, 1, 2, 3, \cdots, 20]$.

Repare-se que para $n \leq 20$, $u_n = n$, logo são termos da sucessão todos os números naturais até ao número 20, e para $n > 20$, $u_n = (-1)^n$, que é limitada e não monótona, admitindo apenas os valores -1 e 1, para n ímpar e n par, respetivamente.

Desta forma (u_n) não é monótona, pois não é monótona para $n > 20$, nem é um infinitamente grande, uma vez que para $n > 20$, só admite os termos -1 e 1.

Resposta Correcta: (C)

FIM GRUPO I

II

1. Tem-se que:

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3(-i)}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1^2-i^2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$$

em que $i^{19} = i^{16} \times i^3 = i^3 = -i$

$$z_2 = -3k\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3k \times (-i) = 3ki$$

Desta forma o complexo z_1 é tal que $\mathrm{Re}(z_1) = 2$ e $\mathrm{Im}(z_1) = 1$, e o complexo z_2 é tal que $\mathrm{Re}(z_2) = 0$ e $\mathrm{Im}(z_2) = 3k$.

A distância entre a imagem geométrica de z_1 e z_2, d, é dada por:

$$d = \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2))^2 + (\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2))^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (1-3k)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 9k^2 - 6k + 1} = \sqrt{9k^2 - 6k + 5}$$

Como $d = \sqrt{5}$, tem-se:

$$d = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{9k^2 - 6k + 5} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 9k^2 - 6k + 5 = 5 \Leftrightarrow 9k^2 - 6k = 0 \Leftrightarrow$$
$$3k(3k-2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 3k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{2}{3}$$

E como $k \in \mathbb{R}^+$, tem-se $k = \dfrac{2}{3}$.

2.

2.1. Sendo T' o ponto simétrico do ponto T, relativamente à origem do referencial, tem-se que o ponto médio do segmento $[TT']$ é a origem, e a distância desta ao ponto T é a cota de T, $z_T = 3$.

Uma equação da superfície esférica de diâmetro $[TT']$ é: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2.2. Tem-se que: $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UP} \cdot (-\overrightarrow{SR}) = \overrightarrow{UP} \cdot (-\overrightarrow{UP}) - \left\|\overrightarrow{UP}\right\|^2 = -z_U^2 = -9$

2.3. O ponto Q está sob o eixo dos y, pelo que as suas coordenadas são $(0{,}y_Q{,}0)$, tal que: $0 + y_Q = 2 \Leftrightarrow y_Q = 2$.

O ponto T tem coordenadas $(0{,}0{,}3)$, logo $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0{,}2{,}0) - (0{,}0{,}3) = (0{,}2{,}-3)$.

Logo uma equação cartesiana que define a reta TQ é: $\dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-3} \wedge x = 0$.

2.4. Qualquer plano constituído por três vértices das faces $[OTSR]$, $[UVQP]$, $[SVQR]$ e $[TUOP]$ é perpendicular ao plano xOy, e, para além disso, qualquer plano com os pontos O,T, V, Q e U, S, R e P: pelo que os casos favoráveis são: $6 \times {}^4C_3$

O número de casos possíveis é referente a escolher três vértices dos oito vértices do prisma: ${}^8C_3$.

A probabilidade pedida é então: $P = \dfrac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \dfrac{3}{7}$.

3. No contexto da situação descrita, $P(\overline{A} \cup B)$ é a probabilidade do número da bola retirada ser maior a 6 ou ser par.

Repare-se que: $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + \underbrace{P(B) - P(\overline{A} \cap B)}_{=P(A \cap B)} = P(\overline{A}) + P(A \cap B)$

Repare-se que $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{6}{n} = \dfrac{n-6}{n}$, uma vez que a probabilidade da bola retirada ser menor ou igual a 6 tem 6 casos favoráveis dos n casos possíveis.

Tem-se ainda que $P(A \cap B)$ é a probabilidade da bola retirada ser menor ou igual a 6 e ser par, logo $P(A \cap B) = \dfrac{3}{n}$.

Vem então: $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(A \cap B) = \dfrac{n-6}{n} + \dfrac{3}{n} = \dfrac{n-6+3}{n} = \dfrac{n-3}{n}$

4.

4.1. Tem-se: $f(0) = 9 - 2{,}5(e^{1-0{,}2\times 0} + e^{0{,}2\times 0 - 1}) = 9 - 2{,}5(e + e^{-1}) \approx 1{,}28$

Logo vem que:

$$\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow \left(f(0)\right)^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - \left(f(0)\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 - \left(f(0)\right)^2} \Leftrightarrow x \approx 1{,}5$$

No contexto do problema, esta solução representa a distância do ponto O, quando a distância do ponto da superfície do rio a P é 2 metros.

4.2. De forma a poder verificar se o barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte, deve-se calcular o valor máximo de f, isto é, a distância vertical máxima do arco da ponte. Essa distância deverá ser maior que 6 de forma a que o barco possa passar por baixo da ponte.

Tem-se que:

$$f'(x) = (9)' - 2{,}5(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}) = 0 - 2{,}5(-0{,}2e^{1-0{,}2x} + 0{,}2e^{0{,}2x-1}) = 0{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)$$

$$= 0{,}5 \times e^{1-0{,}2x}\left(1 - \frac{e^{0{,}2x-1}}{e^{1-0{,}2x}}\right) = 0{,}5 \times e^{1-0{,}2x}\left(1 - e^{0{,}4x-2}\right)$$

Determinem-se os zeros de f:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{1-0{,}2x} = 0}_{\text{Impossivel}} \vee 1 - e^{0{,}4x-2} = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} = 1 \Leftrightarrow 0{,}4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{0{,}4} = 5$$

Através de uma tabela de sinais:

x	0		5		7
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN

Desta forma a distância vertical máxima dá-se para $x = 5$, tal que:

$$f(5) = 9 - 2{,}5(e^{1-0{,}2\times 1} + e^{0{,}2\times 5-1}) = 9 - 2{,}5 \times (1+1) = 9 - 5 = 4$$

Conclui-se, portanto, que o barco não passa por baixo da ponte.

5.

5.1. A função g é contínua em 1 se e só se $\lim_{x\to1^-} g(x) = g(1) = \lim_{x\to1^+} g(x)$, tal que:

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{e^{x-1}-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1}-1}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x-1\to0^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1}} \times \lim_{x\to1^-}(x+1) = \frac{1}{1} \times (1+1) = 2$$

em que $\lim_{x-1\to0^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = 1$ é limite notável.

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+} \left(3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x}\right) = 3 - \lim_{x-1\to0^-} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 3-1 = 2$$

em que $\lim_{x-1\to0^-} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$ é limite notável.

Uma vez que $g(1)=2$, tem-se que $\lim_{x\to1^-} g(x) = g(1) = \lim_{x\to1^+} g(x)$, logo g é contínua em 1.

5.2. Em $]4,5[$, tem-se $g(x) = 3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x}$, de tal forma:

$$g(x) = 3 \Leftrightarrow 3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\sin(x-1)}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \sin(x-1) = 0 \wedge \underbrace{1-x \neq 0}_{4<x<5}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = k\pi, k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x = 1+k\pi, k\in\mathbb{R}$$

e então tem-se:

- Para $k=0$, tem-se $x=1$, tal que $1<4$
- Para $k=1$, tem-se $x=1+\pi$, tal que $4<1+\pi<5$
- Para $k=2$, tem-se $x=1+2\pi$, tal que $1+2\pi>5$

Conclui-se portanto que $\mathsf{C.S} = \{1+\pi\}$.

5.3. Considere-se o gráfico da função g em $x<1$, tal que $g(x) = \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}$.
Tem-se que o ponto A é a interseção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, logo é solução da equação $g(x)=0$, tal que:

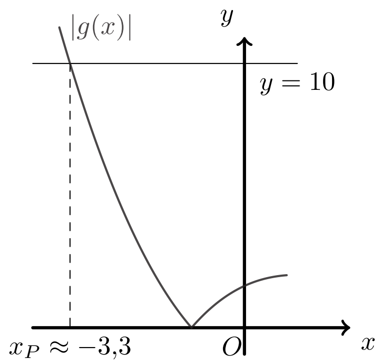
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \wedge 1-e^{x-1} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq 1$$

Tem-se portanto que o ponto A é o ponto de coordenadas $(-1,0)$.

A área do triângulo $[OAP]$ é dada por: $A_{[AOP]}(x_P) = \frac{\overline{OA}\times|g(x_P)|}{2} = \frac{1\times|g(x_P)|}{2} = \frac{|g(x_P)|}{2}$, em que x_P é abcissa do ponto P.

Pretende-se resolver a equação $A_{[AOP]}(x_P) = 5 \Leftrightarrow \frac{|g(x_P)|}{2} = 5 \Leftrightarrow$ $|g(x_P)| = 10 \Leftrightarrow \left|\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}\right| = 10$

e em $x<-1$, tem-se: $\left|\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}\right| = 10 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{1-e^{x-1}} = 10$.



Por observação da figura ao lado, e com recurso às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que $x_P \approx -3{,}3$.

6. O ponto P, de abcissa a, pertence ao gráfico de f, logo as suas coordenadas são $(a,f(a))$.

Uma vez que $\overline{OP} = \overline{PQ}$, tem-se que $[OPQ]$ é isósceles, e, portanto $Q(2a,0)$.

A reta r tem o mesmo declive da reta PQ de tal forma que $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2a,0) - (a,f(a)) = (a, - f(a))$, e portanto, o declive de r pode ser dado por $\dfrac{-f(a)}{a} = -\dfrac{f(a)}{a}$.

A reta r também é a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, pelo que o seu declive é $f'(a)$.

Logo, conclui-se que $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a} \Leftrightarrow f'(a) + \dfrac{f(a)}{a} = 0$.

FIM GRUPO II