

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

11 Páginas

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \text{tgb}}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$n\sqrt{\rho} \text{cis } \theta = n\sqrt{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$
$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Página em branco

GRUPO I

1. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9

Destes números, quantos são múltiplos de 5 ?

- (A) 729 (B) 1458 (C) 3645 (D) 6561

2. Uma turma é constituída por rapazes e por raparigas, num total de 20 alunos.

Sabe-se que:

- $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes;
- escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$

Quantos rapazes tem a turma?

- (A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f

Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0

Seja f'' a segunda derivada da função f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $f''(1) + f''(2) < 0$
(B) $f''(-2) + f''(-1) > 0$
(C) $f''(-1) \times f''(-2) < 0$
(D) $f''(1) \times f''(2) > 0$

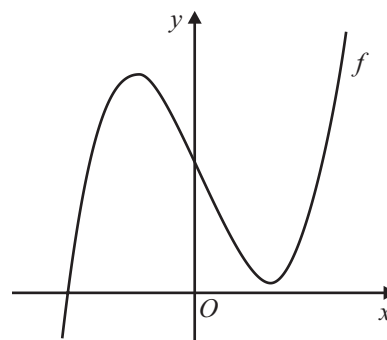


Figura 1

4. Sejam f e g duas funções de domínio \mathbb{R}^+

Sabe-se que a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x}$?

- (A) $+\infty$ (B) 1 (C) -1 (D) $-\infty$

5. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $] -1, +\infty[$, definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

- (A) $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$ (B) $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$ (C) $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right[$ (D) $\left] \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$

6. Considere, num referencial o.n. xOy , uma reta r de inclinação α

Sabe-se que $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

- (A) $y = -5x$ (B) $y = 4x$ (C) $y = -2x$ (D) $y = 3x$

7. Considere em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região?

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 20 \\ (-1)^n & \text{se } n > 20 \end{cases}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A sucessão (u_n) é monótona crescente.
- (B) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.
- (C) A sucessão (u_n) é limitada.
- (D) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande.

GRUPO II

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3k \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad \text{com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

Qual é o valor de k ?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação $z = 3$

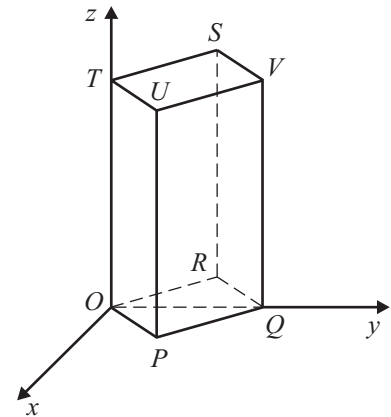


Figura 2

2.1. Seja T' o simétrico do ponto T , relativamente à origem do referencial.

Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[TT']$

2.2. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS}$

2.3. Uma equação do plano PQV é $x + y = 2$

Determine uma condição cartesiana que defina a reta TQ

2.4. Escolhem-se, ao acaso, três vértices do prisma.

Determine a probabilidade de o plano definido por esses três vértices ser perpendicular ao plano xOy

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Um saco contém n bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n (com n par e superior a 6).

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «o número da bola retirada é menor ou igual a 6»

B : «o número da bola retirada é par»

Escreva o significado de $P(\overline{A} \cup B)$ no contexto da situação descrita e determine uma expressão, em função de n , que dê esta probabilidade.

Apresente a expressão na forma de uma fração.

4. Na Figura 3, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio.

A ponte, representada pelo arco PQ , está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.

O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.

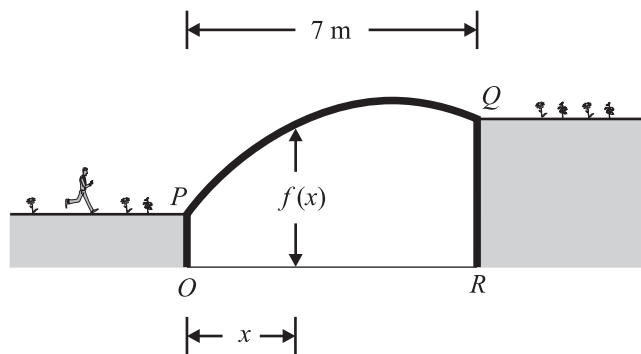


Figura 3

Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre O e R , de abcissa x , a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2,5(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}), \text{ com } x \in [0, 7]$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2. recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

- 4.1. Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta $[OR]$ cuja abcissa x verifica a equação

$$\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2. O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admita que, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.

Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte?

Justifique a sua resposta.

5. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens 5.1. e 5.2. recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1

5.2. Resolva, no intervalo $]4, 5[$, a equação $g(x) = 3$

5.3. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função g e um triângulo $[OAP]$

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g , de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P

Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

- determine analiticamente a abcissa do ponto A
- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

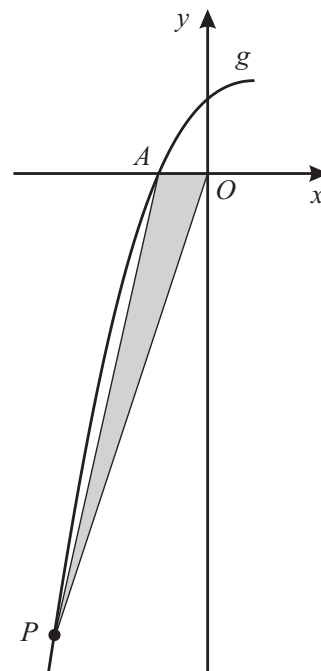


Figura 4

6. Seja $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x

Considere, num referencial o.n. xOy ,

- um ponto P , de abcissa a , pertencente ao gráfico de f
- a reta r , tangente ao gráfico de f no ponto P
- o ponto Q , ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Determine o valor de $f'(a) + \frac{f(a)}{a}$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												40
	8 × 5 pontos												
II	1.	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	5.3.	6.	160
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	
TOTAL													200

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635
1.^a Fase
VERSÃO 1