A Identidade de Euler

Nuno Miguel Guerreiro

Em 1748, Leonhard Euler, por muitos considerado o melhor matemático de sempre, apresentou na sua obra "*Introdução*", àquela a qual se chama **Identidade de Euler**.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Com os conhecimentos de análise complexa, a **Identidade de Euler** parece de fácil demonstração uma vez que dizer que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ é algo que tomamos como verdadeiro.

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = \cos\pi = -1 \quad \text{de tal forma que} \quad e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Contudo, a grande questão não é verificar a **Identidade de Euler** mas sim esta:

"Por que é que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$?"

Ora, o estudo do Série de Taylor permitiu avançar com o estudo da função exponencial de tal forma que para além do que é ensinado no ensino secundário em relação à função exponencial, existe uma outra definição importante para a função exponecial:

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{e ainda} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Repare-se que o Polinómio de Taylor em torno de $x_0 = 0$ da função f definida em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ é:

$$e^x = e^0 + \left[\frac{d}{dx}e^x\right]_{x=0} \times x + \left[\frac{d^2}{dx^2}e^x\right]_{x=0} \times \frac{x^2}{2!} + \left[\frac{d^3}{dx^3}e^x\right]_{x=0} \times \frac{x^3}{3!} + \cdots + \left[\frac{d^n}{dx^n}e^x\right]_{x=0} \times \frac{x^n}{n!}$$

E como $\frac{d}{dx}e^x = \frac{d^2}{dx^2}e^x = \frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x$ vem que todos os "pesos"da Série de Taylor correspondem a uma unidade uma vez que $e^0 = 1$.

A Série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é então:

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

E então:

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots$$

Desta forma tem-se:

$$e^{i\theta} = 1 + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + i^6\frac{\theta^6}{6!} + \cdots = 1 - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

Sabendo que a Série de Taylor para a função cosseno e para a função seno em torno de $x_0 = 0$ é dada por:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Então recuperando o desenvolvimento da Série de Taylor realizado anteriormente vem:

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$$

Tendo em conta a Série de Taylor para a função cosseno e para a função seno vem por fim:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

FIM