



## Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

Critérios de Classificação

10 Páginas

**2012**

### COTAÇÕES

#### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos).....	40 pontos
	<b>40 pontos</b>

#### GRUPO II

1.	
1.1. ....	15 pontos
1.2. ....	15 pontos
2.	
2.1. ....	15 pontos
2.2. ....	10 pontos
3. ....	15 pontos
4.	
4.1. ....	15 pontos
4.2. ....	15 pontos
5.	
5.1. ....	15 pontos
5.2. ....	15 pontos
6.	
6.1. ....	15 pontos
6.2. ....	15 pontos

**160 pontos**

**TOTAL ..... 200 pontos**

**A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.**

## **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de seleção (escolha múltipla).

Nos itens de seleção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

- uma opção incorreta;
- mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização corresponde a cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

<b>Níveis</b>	<b>Descritores</b>
<b>3</b>	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
<b>2</b>	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
<b>1</b>	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 13 e/ou 18.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível.  A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas.  À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto.  O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista.  Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.

\* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
9. Transposição incorreta de dados do enunciado e/ou transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa.  Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro ocasional que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
12. Ocorrência de um erro ocasional na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido.  As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:  – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação;  – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
13. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
14. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
15. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação para ela prevista.
16. Apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
17. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, exceto:  – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;  – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	B	A	C	A	C
Versão 2	C	B	D	B	C	A	D	A

### GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos Critérios Gerais de Classificação).

1.1. .... **15 pontos**

Determinar  $z_1$  na forma algébrica (**ver nota**) ..... 3 pontos

Escrever  $z_1 = (-2 + i)^2 \times (-2 + i)$  ..... 1 ponto

Obter  $(-2 + i)^2$  ..... 1 ponto

Obter  $z_1$  na forma algébrica ..... 1 ponto

Determinar  $z_2$  na forma algébrica (**ver nota**) ..... 3 pontos

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador ..... 1 ponto

Efetuar a multiplicação no numerador ..... 1 ponto

Efetuar a multiplicação no denominador ..... 1 ponto

Obter  $z^3 = 8$  ..... 2 pontos

Obter  $z = \sqrt[3]{8}$  ..... 1 ponto

Escrever  $z = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} 0$  ..... 1 ponto

Escrever  $z = 2 \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\}$  ..... 2 pontos

Obter  $z = 2 \operatorname{cis} 0$  ..... 1 ponto

Obter  $z = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$  ..... 1 ponto

Obter  $z = 2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$  ..... 1 ponto

**Nota** – Se o examinando determinar o complexo na forma algébrica utilizando processos de resolução que não respeitam a instrução dada, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos e a pontuação das etapas subsequentes não deve ser desvalorizada.

**1.2. .... 15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Escrever  $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n$  (ou equivalente) ..... 5 pontos

Resolver a equação  $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n$  ..... 10 pontos

Obter  $w^{2n} = 1$  ..... 2 pontos

Referir que  $w^n = z$  ..... 2 pontos

Referir que  $w^{2n} = z^2$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever  $z^2 = 1$  ..... 2 pontos

Obter  $z = 1$  ou  $z = -1$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Considerar  $w = \rho \operatorname{cis} \theta$

Referir que  $z = w^n$  ..... 2 pontos

Escrever  $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n$  (ou equivalente) ..... 5 pontos

Resolver a equação  $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n$  ..... 5 pontos

Escrever  $w^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$  ..... 1 ponto

Escrever  $\left(\frac{1}{w}\right)^n = \left(\frac{1}{\rho}\right)^n \operatorname{cis}(-n\theta)$  ..... 2 pontos

Obter  $\rho^{2n} = 1$  ..... 1 ponto

Obter  $n\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  ..... 1 ponto

Obter  $z = 1 \operatorname{cis} k\pi, k \in \mathbb{Z}$  ..... 1 ponto

Obter  $z = 1$  ou  $z = -1$  ..... 2 pontos

**2.1. .... 15 pontos**

Seja  $A$  o acontecimento «o aluno ser rapariga», e seja  $B$  o acontecimento «o aluno ter excesso de peso».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Calcular  $P(A \cap B)$  ..... 4 pontos

Escrever  $P(A) = 0,55$  ..... 1 ponto

Escrever  $P(B | A) = 0,3$  ..... 2 pontos

Obter  $P(A \cap B)$  ..... 1 ponto

Calcular  $P(\overline{A} \cap \overline{B})$  ..... 4 pontos

Escrever  $P(\overline{B} | \overline{A}) = 0,4$  ..... 2 pontos

Obter  $P(\overline{A})$  ..... 1 ponto

Obter  $P(\overline{A} \cap \overline{B})$  ..... 1 ponto

Calcular  $P(\overline{A} \cap B)$  ..... 2 pontos

- Calcular  $P(B)$  ..... 2 pontos
- Identificar o pedido com  $P(\bar{A} | B)$  ..... 1 ponto
- Escrever  $P(\bar{A} | B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$  (ou equivalente) ..... 1 ponto
- Obter  $P(\bar{A} | B)$  ..... 1 ponto

**2.2.** ..... **10 pontos**

- Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 8 pontos
- Calcular o valor pedido (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Esta etapa deve ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho.

$\frac{{}^{110}C_2 \times 90}{{}^{200}C_3}$  (ou equivalente) ..... 8 pontos

$\frac{{}^{110}A_2 \times 90}{{}^{200}A_3}$  (ou equivalente) ..... 5 pontos

Outras frações próprias com denominador  ${}^{200}C_3$  ..... 2 pontos

Outras respostas ..... 0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

**3.** ..... **15 pontos**

A composição deve contemplar os pontos seguintes.

- A) uma explicação para  $X = 0$
- B) uma explicação para  $X = 4$
- C) uma justificação para  $P(X = 0)$
- D) uma justificação para  $P(X = 4)$

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis*		
			1	2	3
<b>Níveis</b>	<b>4</b>	A composição contempla corretamente os quatro pontos.	13	14	15
	<b>3</b>	A composição contempla corretamente apenas três dos quatro pontos.	10	11	12
	<b>2</b>	A composição contempla corretamente apenas dois dos quatro pontos.	7	8	9
	<b>1</b>	A composição contempla corretamente apenas um dos quatro pontos.	4	5	6

\* Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

**4.1. .... 15 pontos**

Escrever $f(x) = 0$ .....	1 ponto
Resolver a equação $f(x) = 0$ .....	14 pontos
Obter $e^x - 4e^{-x} - 4 = 0$ .....	4 pontos
Obter $(e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0$ .....	3 pontos
Concluir que $e^x = 2 \pm 2\sqrt{2}$ ( <b>ver nota</b> ) .....	3 pontos
Reconhecer que $e^x = 2 - 2\sqrt{2}$ é uma equação impossível.....	2 pontos
Obter $x = \ln(2 + 2\sqrt{2})$ .....	2 pontos

**Nota** – Se o examinando utilizar a calculadora para determinar a solução da equação do 2.º grau, a pontuação a atribuir nesta etapa não deve ser desvalorizada.

**4.2. .... 15 pontos**

Reproduzir os gráficos visualizados na calculadora ( <b>ver notas 1 e 2</b> ) .....	4 pontos
Reproduzir o gráfico de $f$ .....	2 pontos
Reproduzir o gráfico de $g$ .....	2 pontos
Assinalar os pontos $A$ e $B$ ..... (1 + 1).....	2 pontos
Indicar a abscissa do ponto $A$ .....	1 ponto
Indicar as coordenadas do ponto $B$ .....	2 pontos
Identificar a base do triângulo $[OAB]$ .....	1 ponto
Identificar a altura do triângulo $[OAB]$ .....	2 pontos
Calcular a área do triângulo $[OAB]$ .....	3 pontos

**Notas:**

1. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.
2. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.



5.1. .... 15 pontos

Estudar a existência de assíntotas não verticais do gráfico da função  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$  ..... 3 pontos

Calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico de  $f$  não tem assíntota não vertical quando  $x \rightarrow -\infty$  ..... 1 ponto

Estudar a existência de assíntotas não verticais do gráfico da função  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$  ..... 12 pontos

Determinar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 5 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x) + 3)$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3 \right)$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 3 \right)$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 2 pontos

Determinar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$  ..... 6 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - x \ln(x))$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right)$  ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 3 pontos

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$$

(ou equivalente) (**ver nota**) ..... 2 pontos

Referir o limite notável  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$  1 ponto

Obter o valor de  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$  ..... 1 ponto

Concluir que o gráfico de  $f$  tem uma assíntota não vertical quando  $x \rightarrow +\infty$  ..... 1 ponto

**Nota** – Se o examinando referir que  $x \rightarrow +\infty$  é equivalente a  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

**5.2.** ..... **15 pontos**

- Determinar  $f'$  ..... 5 pontos
- Escrever  $(x e^{1-x})' = x' e^{1-x} + x(e^{1-x})'$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Obter  $f'$  ..... 3 pontos
- Identificar o declive da reta tangente com  $f'(-1)$  ..... 3 pontos
- Calcular  $f'(-1)$  ..... 2 pontos
- Calcular  $f(-1)$  ..... 2 pontos
- Escrever a equação reduzida da reta pedida ..... 3 pontos

**6.1.** ..... **15 pontos**

- Referir que o perímetro do trapézio  $[ABCD]$  é igual a  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$  (ou equivalente) ..... 1 ponto
- Escrever  $\overline{AB} = 1 + \overline{AD}_1$ , sendo  $D_1$  a projeção ortogonal de  $D$  sobre  $AB$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Determinar  $\overline{AD}_1$  ..... 5 pontos
- Escrever  $\overline{AD}_1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  ..... 2 pontos
- Obter  $\overline{AD}_1 = -\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$  (ou equivalente) ..... 3 pontos
- Determinar  $\overline{AD}$  ..... 4 pontos
- Escrever  $\overline{AD} = \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$  ..... 2 pontos
- Obter  $\overline{AD} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$  ..... 2 pontos
- Concluir o pretendido ..... 3 pontos

**6.2.** ..... **15 pontos**

- Determinar  $P'$  ..... 7 pontos
- Escrever  $\left(3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}\right)'$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\left(3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}\right)' = \frac{(1 - \cos \alpha)' \operatorname{sen} \alpha - (1 - \cos \alpha)(\operatorname{sen} \alpha)'}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$  ..... 2 pontos
- Determinar  $(1 - \cos \alpha)'$  ..... 1 ponto
- Determinar  $(\operatorname{sen} \alpha)'$  ..... 1 ponto
- Substituir  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  por 1 ..... 1 ponto
- Obter  $P'(\alpha)$  ..... 1 ponto
- Determinar  $P'(\theta)$  ..... 8 pontos
- Determinar  $\cos \theta$  ..... 3 pontos
- Determinar  $\operatorname{sen} \theta$  ..... 3 pontos
- Calcular o valor exato de  $P'(\theta)$  ..... 2 pontos